

イデール類群の 1-コホモロジー群

について

阪大理学部 赤川 安正

- $\mathcal{L} = \{l\}$: 有限個又は無限個の素数 l の集合
- \mathcal{C} : 次の 3 条件をみたす pro-finite groups のカテゴリ
 - C1) $\text{Hom}(G, G')$ は位相群 G から G' への hom. 全体
 - C2) $G \in \text{obj } \mathcal{C} \implies$ 可換 pro- p ($p \in \mathcal{L}$)-群 A の G による群拡大 \tilde{G} (i. e. $1 \rightarrow A \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$: exact) をとると, $\tilde{G} \in \text{obj } \mathcal{C}$.
 - C3) \mathcal{C} の中で $\cdots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1$ をとると常に $\varprojlim G_n \in \text{obj } \mathcal{C}$

とする. 例えば pro-finite gr., pro-solvable gr., pro- p -

gr. 等を考えればよい. 次に
 (のカテゴリ)

- $\Gamma = \{\gamma\}$: 固定された index set
- $G_\Gamma = \{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$: pro-finite gr. G_γ ($\in \text{obj } \mathcal{C}$ or not) の集合

とする。次の3条件をみたす組 (G, σ_P, ι_S) の集合 \mathcal{C} とする

Obj 1) $G \in \text{Obj } \mathcal{C}$

$\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$

Obj 2) $\sigma_P = \{\sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ は位相群 G の (必ずしも最小ではない) 生成系 i.e. $G = \langle \sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle$

Obj 3) $\iota_S = \{\iota_\beta \mid \beta \in S\}, \iota_\beta : G_\beta \rightarrow G$ (hom.)

$\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ は次の様にして半順序集合となる:

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \iff \exists \psi \in \text{Hom}(G, G');$$

s.t. ① $\psi(\sigma_\gamma) = \sigma_{\gamma'}$ ($\forall \gamma \in \Gamma$) ② $\psi \iota_\beta = \iota_{\beta'}$ ($\forall \beta \in S$)

$$\left. \begin{array}{l} (G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \\ \text{"} \leq \text{"} \end{array} \right\} \text{が同時に成立つとき,}$$

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \sim (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \text{ とし, } \mathcal{C}(\Gamma, G_S) / \sim$$

をあらためて $\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ とおく。

◎ C3) より $\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ は帰納的集合になる。

よって (G, σ_P, ι_S) がその極大元であるとき, 「 G の relations は G_S だけで与えられる」ということにする。

さて,

- \mathbb{k} : 体

- $\mathbb{k}_S = \{\mathbb{k}_\beta \mid \beta \in S\}$ は $\mathbb{k}_\beta > \mathbb{k}$ なる体 \mathbb{k}_β の集合

- $A_{\mathbb{k}}$: $\prod_S \mathbb{k}_\beta \supset A_{\mathbb{k}} \supset (\sum_S \mathbb{k}_\beta) \cup \mathbb{k}$ なる \mathbb{k} -algebra

- \bar{k}/k : max. C-拡大 (i.e. Galois 群が C に属する Galois 拡大のうち最大のもの)
- $A_{\bar{k}} = A_k \otimes_k \bar{k}$
- $J_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^\times$: $A_{\bar{k}}$ の正則元が作る乗法群
- $P_{\bar{k}} : \bar{k} \hookrightarrow A_{\bar{k}}$ における \bar{k}^\times の image
- $C_{\bar{k}} = J_{\bar{k}} / P_{\bar{k}}$
- \mathcal{O}_k : \bar{k}/k のガロワ群 $G(\bar{k}/k)$
- $\mathcal{O}_S = \{\mathcal{O}_s \mid s \in S\}$, \mathcal{O}_s は k_s の max. C-拡大 (又は単に max. Galois 拡大) の Galois 群とする. このとき次の定理が成立つ.

定理 $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$

$\Leftrightarrow \mathcal{O}_k$ の relations は \mathcal{O}_S だけで与えられる

実際、^代数体や有限体上の一変数代数関数体の様に、イデール類群が類構造をなすものは $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$ をみたす. この $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$ は Hasse のノルム定理と同値なものであるが (例えば 河田敬義「代数的整数論」共立), 上記定理はこの等式のいま一つの解釈を与えるものといえる.