数理解析研究所講究録
41巻 1968年 25-35

相互法則の詳しい公式

九大 理　白谷克巳

§1. 序

1の原始m乗根を含む代数体でのm巾剰余の相互法則の詳しい公式を求める問題は，mが素数巾p^nの場合に帰着し，更に$\mathfrak{p}$-進体($\mathfrak{p}|p$)でのノルム記号を詳しく決定することになる。

体kを標数0で，離散的付値をもつ完備体，その剰余類体$\bar{k}$が標数$p>0$の完成体とする。　更にkが1の原始p^n乗根を含むとし，その一つζ_nをとって固定する。

任意の$\alpha, \beta \in k^\times$に対し

$$u^{p^n}=\alpha \quad , \quad v^{p^n}=\beta \quad , \quad vu=\zeta_n uv$$

で定義されるk上の巡回多元環を$(\alpha, \beta; \zeta_n)$とすれば，Witt [15]により

$$(\alpha, \beta; \zeta_n) = (\pi, \omega; \zeta_n)$$

なる本質的には一意的な表示をもつ。　πはkの素元，ωは

kのp^n-primaryな元で，素元πの選び方は問題にならない。このとき，記号$[\alpha,\beta]$を$[\alpha,\beta]\underset{p^n}{=}\omega$で定義すれば，次のことが成立する。ここで，$\underset{p^n}{=}$は両辺が$k$の元の$p^n$乗を無視して等しいことを示す。

(イ) $$[\alpha_1\alpha_2,\beta]\underset{p^n}{=}[\alpha_1,\beta]\cdot[\alpha_2,\beta]$$
$$[\alpha,\beta_1\beta_2]\underset{p^n}{=}[\alpha,\beta_1]\cdot[\alpha,\beta_2]$$

(ロ) $$[\alpha,\beta]\cdot[\beta,\alpha]\underset{p^n}{=}1$$

(ハ) $[\alpha,\beta]\underset{p^n}{=}1 \Leftrightarrow \alpha$は$k(\sqrt[p^n]{\beta})$の元のノルムである。

特に，$[-\alpha,\alpha]\underset{p^n}{=}1$，$[1-\alpha,\alpha]\underset{p^n}{=}1$。

kが有限体ならば，ノルム記号(α,β)と次の関係がある。

$$(\alpha,\beta)=(\pi,\omega)=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right),\quad [\alpha,\beta]\underset{p^n}{=}\omega\ .$$

$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)$は$p^n$次の巾剰余記号である。

§2. Šafarevičの相互法則

p^n次のノルム記号を精密に定めることには，先ずŠafarevičの論文[12]及びそれに続くHasse，Kneserの補充，簡易化[8]，[9]があって，簡単にそれを説明する。

Tをkの惰性体，RをTの中での，従ってkの中での，kに対するTeichmüller代表系（即ち，乗法的に閉じているkの完全代表系，$R^p=R$であり，このようなRは一つ存在する）とする。

$k \to k^p$ なる自己同型に対応する T/Q_p の自己同型を $\mathbb{P}$ とすれば

$$\alpha = \sum_{i \gg -\infty} \alpha_i p^i \ , \quad \alpha_i \in R \longrightarrow \alpha^{\mathbb{P}} = \sum_{i \gg -\infty} \alpha_i^p p^i \ .$$

k の代数的閉体 $\bar{k}$ に対して，$\bar{T}$ を T の不分岐拡大で，剰余類体 $\bar{k}$ をもつ体とすれば $\mathbb{P}$ は $\bar{T}$ の自己同型として定義される。 $\bar{T}$ の $\bar{k}$ に対する Teichmüller 代表系 $\bar{R}$ をとり，上と同様である。 このとき， $\wp(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^{\mathbb{P}} - \bar{\alpha}$ ， $\bar{\alpha} \in \bar{T}$ とおけば， $\wp(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = \wp(\bar{\alpha}) + \wp(\bar{\beta})$ で， $\wp$ は $\bar{T}^+$ の上への自己準同型である。 特に，$\alpha \in \mathcal{O}_T$ に対し $\wp(\bar{\alpha}) = \alpha$ なる $\bar{\alpha} \in \mathcal{O}_{\bar{T}}$ が存在する。

さて， Artin - Hasse - Šafarevič の函数 $E(\alpha, x)$ と数 $E(\alpha)$ を次のように定義する。

$\alpha \in \mathcal{O}_T$ に対し， $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p^i$ ，$\alpha_i \in R$ として

$$E(\alpha, x) = \prod_{i=0}^{\infty} E(\alpha_i, x)^{p^i} = \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{\substack{m \geqq 1 \\ (m,p)=1}} (1 - \alpha_i^m x^m)^{\frac{\mu(m)}{m} p^i} .$$

容易にわかるように， $E(\alpha, x) \in \mathcal{O}_T\{x\}$ で， $E(\alpha, x) = e^{-L(\alpha, x)}$ が $\alpha \in R$ に対して成り立つ。 ここに， $L(\alpha, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{p^i}}{p^i} x^{p^i}$ ，$\alpha \in \mathcal{O}_T$ である。 更に，$E(\alpha+\beta, x) = E(\alpha, x) E(\beta, x)$ ，$\alpha, \beta \in \mathcal{O}_T$ が成立する。

ζ_n を 1 の原始 p^n 乗根とし， $\zeta_n = E(1, \tilde{\pi}_n)$ により，素元 $\tilde{\pi}$ ， $\alpha \in \mathcal{O}_T$ に対し $\wp(\bar{\alpha}) = \alpha$ なる $\bar{\alpha}$ を $k \cdot \bar{T} = \bar{k}$ の中に

とり　$E(\alpha) = E(p^n\bar{\alpha}, \tilde{\pi}_n) = E(\bar{\alpha}, \tilde{\pi}_n)^{p^n}$　で　$E(\alpha)$を定義する。これは$\bar{\alpha}$の選び方に依存せず，αのみで定まる。そして，$E(\alpha)$はkのp^n-primaryな単数である。逆に，kのp^n-primaryな元はp^n乗巾を無視して$E(\alpha)$と書ける。しかも，$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)\cdot E(\beta)$であり，この準同型の核は$\vartheta \in \mathcal{O}_T$，$\vartheta \equiv \wp(\eta) \bmod p^n$，$\eta \in \mathcal{O}_T$である$\vartheta$である。このような$\vartheta$を$\vartheta \equiv 0 \bmod p^n, \wp$と書く。

さて，eをkの分岐指数，$e_0 = \frac{e}{p-1}$，πをkの任意の素元としたとき，Šafarevičの底表示が次のように成立する。

任意の$\gamma \in k^\times$に対して

$$\gamma \underset{p^n}{=} \pi^{\gamma^*} E(\gamma') \prod_{\substack{1 \leq j \leq e_0 p \\ (j,p)=1}} E(\gamma_j, \pi^j) \quad ,$$

γ^*は$\bmod p^n$で定まる有理整数，γ'，γ_jは$\bmod p^n, \wp$及び$\bmod p^n$で定まる$\mathcal{O}_T$の元である。

このとき，Šafarevičの相互法則

$$[\alpha, \beta] \underset{p^n}{=} E(\alpha^*\beta' - \alpha'\beta^* + \gamma')$$

即ち

$$(\alpha, \beta) = \zeta_n^{S(\alpha^*\beta' - \alpha'\beta^* + \gamma')}$$

が成り立つ。ここで，Sは惰性体Tの絶対的スプールを示し，γ'は次のようにして定まる$\mathcal{O}_T$の元である。

$p \neq 2$ならば

$$\prod_{\substack{1\leqq i,j\leqq e_0p\\(i,p)=(j,p)=1}} E(j\alpha_i\beta_j,\pi^{i+j}) \underset{p^n}{=} E(\gamma')\prod_{\substack{1\leqq j\leqq e_0p\\(j,p)=1}} E(\gamma_j,\pi^j) \quad ,$$

$p=2$ ならば

$$(-1)^{\alpha^*\beta^*}\prod_{\substack{1\leqq i,j\leqq 2e_0\\(i,2)=(j,2)=1}}\left[E(j\alpha_i\beta_j,\pi^{i+j})\prod_{\mu,\nu=1}^{\infty}E((i2^{\mu-1}+j2^{\nu-1})\alpha_i^{p^\mu}\beta_j^{p^\nu},\pi^{2^\mu i+2^\nu j})\right]$$

$$\underset{p^n}{=} E(\gamma')\prod_{\substack{1\leqq j\leqq 2e_0\\(j,2)=1}} E(\gamma_j,\pi^j) \quad .$$

この Šafarevič の公式では，α,β から定まる元 γ' を求めることが実際的計算において困難である。記号 (α,β) を，α と β それ自身で出来るだけ簡明に求めることが望まれる。k の分岐の状態と，α,β をパラメーターにして，(α,β) を計算しやすい形に求めることである。

実際，$k=\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ の場合には，Kummer，Takagi，Hasse，Yamamoto，Artin-Tate 等の簡単な公式がある [1]，[2]，[6]，[16]。 p を奇素数，$\zeta=\zeta_p$ として

$$(\alpha,\beta)=\zeta^{\frac{1}{p}S_k(\zeta\log\alpha D\log\beta)} \quad ,$$

$$(\beta,\zeta)=\zeta^{\frac{1}{p}S_k(-\log\beta)} \quad ,$$

$$(\beta,\lambda)=\zeta^{\frac{1}{p}S_k(\frac{\zeta}{\lambda}\log\beta)} \quad .$$

ここで，$\alpha\equiv 1 \mod \mathfrak{f}^2$，$\beta\equiv 1 \mod \mathfrak{f}$，$\lambda=1-\zeta$ であり，S_k は k での絶対的スプールを示す。$\beta=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\lambda^i$，$\beta_i\in\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ を β の λ-展開としたとき，$D\log\beta=\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{\infty}i\beta_i\lambda^{i-1}$ と定義す

る。

$p=2$ の場合には，Shiratani [14] が (α,β) を詳しく決定することを試みたが，最近 Brückner [3] が，奇素数の場合も含めて，一つの公式を求めたので，以下その紹介をする。

§3. Brücknerの公式

π は k の素元，$\lambda=1-\zeta$，$\zeta=\zeta_p$ とする。 $\gamma\in k^\times$ に対し，その π-展開を

$$\gamma=\sum_{i>>-\infty}^{\infty}\gamma_i\pi^i\quad,\quad\gamma_i\in R$$

としたとき，γ に $\gamma(x)=\sum_{i>>-\infty}\gamma_i x^i\in\mathcal{O}_T\{x\}$ なる級数を対応させる。そして

$$\gamma(x)^{\mathfrak{P}}=\sum_{i>>-\infty}\gamma_i^p x^{pi}$$

とおく。先ず，$p\neq 2$ に対して，記号 $\langle\alpha,\beta\rangle$ を次のように定義する。

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\mathrm{Res}\,\frac{1}{\lambda(x)^{\mathfrak{P}}}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\alpha(x)^p}{\alpha(x)^{\mathfrak{P}}}D\log\beta(x)-\frac{1}{p}\log\frac{\beta(x)^p}{\beta(x)^{\mathfrak{P}}}\frac{1}{p}D\log\alpha(x)^{\mathfrak{P}}\right).$$

ここで，$\frac{\alpha(x)^p}{\alpha(x)^{\mathfrak{P}}}\equiv 1 \mod x$ だから $\log\frac{\alpha(x)^p}{\alpha(x)^{\mathfrak{P}}}$ 等は意味をもつ。 $D\log\alpha(x)$ は形式的な対数微分即ち $D\log\alpha(x)=\frac{\alpha(x)'}{\alpha(x)}$ を意味し，Res は留数を示す。

定義から計算して

$$\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathcal{O}_T\quad,$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle\equiv 0 \mod p\quad,$$

$$\langle \alpha_1\alpha_2, \beta\rangle \equiv \langle \alpha_1, \beta\rangle + \langle \alpha_2, \beta\rangle \quad \mathrm{mod}\ p, \mathfrak{P} \quad ,$$

$$\langle \alpha, \beta_1\beta_2\rangle \equiv \langle \alpha, \beta_1\rangle + \langle \alpha, \beta_2\rangle \quad \mathrm{mod}\ p, \mathfrak{P} \quad ,$$

が成立することがわかる。

さて, $a_1)$ $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$, $a_2)$ $\alpha = 1 - \rho\pi^{i}$, $\beta = \pi$, $(i, p) = 1$, $\rho \in R^{\times} = R - \{0\}$, $a_3)$ $\alpha = 1 - \rho\pi^{e_0 p}$, $\beta = \pi$, $\rho \in R^{\times}$ について $[\alpha, \beta] = E(\langle \alpha, \beta\rangle)$ を確めて, 第2補充法則

$$[\alpha, \pi] = E(\langle \alpha, \pi\rangle) = E\left(\mathrm{Res}\ \frac{x^{-1}}{\lambda(x)^p}\frac{1}{p}\log\frac{\alpha(x)^p}{\alpha(x)^p}\right)$$

を得る。 $b)$ $\alpha = 1 - \rho\pi^{i}$, $\beta = 1 - \sigma\pi^{j}$, $\rho, \sigma \in R^{\times}$ については, Eisenstein の方法により計算する。 即ち

$[\alpha, \beta] = [\alpha, \gamma][\gamma, \beta][-1, \gamma]$ より

$$[1-\rho\pi^i, 1-\sigma\pi^j] = \prod_{\substack{(m,n)=1\\ m,n\geqq 1}} [1-(\rho\pi^i)^m(\sigma\pi^j)^n, \pi]^{-(m_0 i + n_0 j)}[-1, 1-(\rho\pi^i)^m(\sigma\pi^j)^n].$$

ここで, m_0, n_0 は $mn_0 - m_0 n = 1$ なる有理整数である。この式を利用して, 少し計算すれば

$$[1-\rho\pi^i, 1-\sigma\pi^j] = E(\langle 1-\rho\pi^i, 1-\sigma\pi^j\rangle)$$

が得られる。 従って, すべての場合に, $p \neq 2$ ならば $[\alpha, \beta] = E(\langle \alpha, \beta\rangle)$ が成立する。 これから, 先に述べた Artin - Tate の式も得られる。

次に, $p = 2$ の場合には, 記号 $\langle \alpha, \beta\rangle$ を次式で定義する

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \mathrm{Res}\Big[\frac{1}{z(x)^{\wp}}\Big(\frac{1}{2}\frac{\alpha(x)^{p}-\alpha(x)^{\wp}}{\alpha(x)^{\wp}}D\log\beta(x)-\frac{1}{2}\frac{\beta(x)^{p}-\beta(x)^{\wp}}{\beta(x)^{\wp}}\frac{1}{2}D\log\alpha(x)^{\wp}\Big)$$
$$+\Big(\frac{x}{z(x)}+x^2 D\log x\, z(x)\Big)\cdot D\log\alpha(x)\cdot D\log\beta(x)\Big].$$

以前と全く同様にして，

$$\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathcal{O}_T\quad,$$
$$\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle\equiv 0\mod 2\quad,$$
$$\langle\alpha_1\alpha_2,\beta\rangle\equiv\langle\alpha_1,\beta\rangle+\langle\alpha_2,\beta\rangle\mod 2,\mathfrak{P}\,,$$
$$\langle\alpha,\beta_1\beta_2\rangle\equiv\langle\alpha,\beta_1\rangle+\langle\alpha,\beta_2\rangle\mod 2,\mathfrak{P}\,,$$

が確められて，

$$[\alpha,\beta]=E(\langle\alpha,\beta\rangle)$$

が成立する。

$a_1)$, $a_2)$, $a_3)$ の場合にこれを検証し，

$$[\alpha,\pi]=E(\langle\alpha,\beta\rangle)$$
$$=E\Big(\mathrm{Res}\Big[\frac{x^{-1}}{z(x)^{\wp}}\,\frac{\alpha(x)^2-\alpha(x)^{\wp}}{2\cdot\alpha(x)^{\wp}}+\Big(\frac{1}{z(x)}+x\log x\, z(x)\Big)D\log\alpha(x)\Big]\Big),$$
$$[-1,\beta]=E\Big(\mathrm{Res}\,\frac{1}{z(x)}D\log\beta(x)\Big)\quad,$$

がわかる。　後，Eisenstein の手続きで，$[1-\rho\pi^i, 1-\alpha\pi^j]$ と $\langle 1-\rho\pi^i, 1-\alpha\pi^j\rangle$ を計算して $b)$ の場合を証明するのであるが，$[-1, (\rho\pi^i)^m(\alpha\pi^j)^n]$ が寄与して，以前より複雑な変形を必要とする。

上の定義で補正項をつけるのは，-1 が R に属さず，$\langle-\pi,\pi\rangle\equiv 0$ や $\langle 1-\rho\pi^i,\pi\rangle\equiv 0$ がもはや成立しないからである。

$\langle\alpha,\beta\rangle$ の定義は素元 π に依存するが，ノルム記号と一致し

たのだから，πの取り方に依存しないこともわかる。

この公式を使用して，Hilbert のノルム剰余記号の公式は容易に計算出来る。 この節では，等号 $\underset{p}{=}$ には特に注意せずすべて省略した。

§4. Lubin-Tate の式

kの素元πに対応する$O_k[[X]]$の級数 $f(X)$: $f(X)\equiv\pi X \bmod \deg 2$，$f(X)\equiv X^q \bmod \pi$，$q=N_k\pi$，から生ずる$O_k$で定義される形式的 Lie 群 $F(x,y)$ の形式的虚数乗法から，Lubin-Tate [10] は次のような公式を導いた。

kの代数的閉体$\bar{k}$の中で，π^mー等分点の全体を$\Lambda_{f,m}$とし，その体を$L_{f,m}=k(\Lambda_{f,m})$とする。 kの任意の単数uに対して

$$(u, L_{f,m}/k)\lambda = [u^{-1}]_f(\lambda) \quad , \quad \lambda\in\Lambda_{f,m}$$

が成立する。 $(u, L_{f,m}/k)$ は，$L_{f,m}/k$ の相互法則でuに対応する$L_{f,m}/k$の自己同型を，$[u^{-1}]_f$ は $F(x,y)$ の u^{-1} に対応する自己準同型を示す。 特に，$k=Q_p$で，$\pi=p$，$f(X)=(1+X)^p-1$ のときには，これは円体の相互法則[5]になる。

特別な体 $L_{f,m}$ だけでなく，一般的にk上のアーベル体に対して，このような詳しい公式が得られることが望ましい。

文　献

[1] E. Artin - H. Hasse, Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln, Abh. Math. Semi. Hamburg, 6, 1928.

[2] E. Artin - J. Tate, Class field theory, Princeton Univ., 1951/1952.

[3] H. Brückner, Eine explizite Formel für das p-te Normsymbol in diskret bewerteten vollständigen Körpern der Charakteristik 0 mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p, Diss. Hamburg Univ., 1965.

[4] M. Deuring, Algebren, Berlin, 1935.

[5] B. Dwork, Norm residue symbol in local number fields, Abh. Math. Semi. Hamburg, 22, 1958.

[6] H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, II, J.B.D.M.V., 1930,

[7] H. Hasse, Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p, Jour. reine angew. Math., 176, 1937.

[8] H. Hasse, Zur Arbeit von I.R. Šafarevič über das allgemeine Reziprozitätsgesetz, Math. Nachr., 5, 1951.

[9] M. Kneser, Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von I.R. Šafarevič, Math. Nachr., 6, 1951/52.

[10] J. Lubin - J. Tate, Formal complex multiplication in local fields, Ann. Math., 81, 1965.

[11] H. Rothgiesser, Zum Reziprozitätsgesetz für l^n, Abh. Math. Semi. Hamburg, 11, 1934.

[12] I.R. Šafarevič, A general reciprocity law, Amer. Math. Soc. Transl., 4, 1956.

[13] K. Shiratani, Note on the Kummer-Hilbert reciprocity law, Jour. Math. Soc. Japan, 12, 1960.

[14] K. Shiratani, On the quadratic norm symbol in local number fields, Journ. Math. Soc. Japan, 13, 1961.

[15] E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, Jour. reine angew. Math., 176, 1937.

[16] K. Yamamoto, On the Kummer-Hilbert reciprocity law, Mem. Fac. Scie. Kyushu Univ., Ser. A, 3, 1959.