数理解析研究所講究録
42 巻 1968 年 71-84

Dirichlet 問題にたいする Ritz-Galerkin 法の応用について

京大 数研 三好哲彦

§1 序

D を平面上の有界領域とする。境界値問題

$$\text{(1.1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(b\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-cu=f \quad \text{in } D \\ u\Big|_{\partial D}=0 \qquad (a>0,\ b>0,\ c\geqq 0) \end{cases}$$

の解にたいする Ritz-Galerkin 式近似法とは次のような近似解法である。まず境界条件及びその他若干の条件をみたす関数系 $\{\varphi_k\}$ を選ぶ。そのような関数系を見出すことができたならば，才 m 近似解 u_m を

$$\text{(1.2)} \qquad u_m=\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k$$

の形で求めることにし，その係数 $\{a_k\}$ を連立一次方程式

$$\text{(1.3)} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k,s}\,a_k+\beta_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,m) \\ \displaystyle\alpha_{k,s}=\alpha_{s,k}=\iint_D\left[a\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}+c\varphi_k\varphi_s\right]dx\,dy \\ \displaystyle\beta_s=\iint_D f\varphi_s\,dx\,dy \end{cases}$$

により決定する。

以上の手続きで求められた近似解が正確解へ一様収束するための条件を検討することがこのノートの目的である。

尚、このノートでは領域Dの境界に強い制限がつけられているがこの制限は不要であり、Ritz-Galerkin 近似の一様収束性は非常に弱い条件のもとでも得られるということを付記しておく（[6]を参照のこと）。

記号；　Dを平面上の有界領域とする。

$\dot{C}^m(D)$；　Dで m 回連続的微分可能な関数でDの境界で0となるもの全体.

$\mathring{C}^m(D)$；　$\dot{C}^m(D)$ に属す関数でD内に台をもつもの全体.

$\mathring{W}^1_2(D)$；　空间 $\mathring{C}^\infty(D)$ を次のノルムによって完備化した空间.

$$\|u\|^2_{1,L^2(D)} = \sum_{i=1,2} \|\partial_i u\|^2_{L^2(D)} \cdot \left(\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ x_1 = x,\ x_2 = y\right)$$

$L^2_T(S)$；　S をその辺が $x=\pm 1, |y|\le 1$ 及び $y=\pm 1, |x|\le 1$ で表わされる正方形とする。$u \in L^2_T(S)$ とは、S 上で定義された $\varphi(x,y) = \cos^{-1}x \cdot \cos^{-1}y$ 可測な関数であって、ルベーグ－スチルチエス式積分

$$\iint_S u^2(x,y)\, d\varphi(x,y)$$

が有限な値をもつものである。この空間は完備である。

§2 Ritz-Galerkin 法の理論的背景

係数及び f は十分滑かであるとする。Dの境界がある種の条件（たとえば Poincaré 条件）を満足さすならば，(1.1)の解 $\bar{u}(x,y) \in \dot{C}^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ が一意に存在し等式

$$(2.1) \qquad \left(a\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{L^2(D)} + \left(b\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{L^2(D)} + (c\bar{u}, \varphi)_{L^2(D)} = -(f, \varphi)_{L^2(D)}$$

を任意の $\varphi(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ について満足さす（[3]）。Dの境界にたいするこの条件を仮に条件(A)と呼ぶことにする。

次に $\eta(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ にたいし別のノルム $\|\eta\|_J$ を次のように定める。

$$(2.2) \qquad \|\eta\|_J = \left[\iint_D \left\{a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + c\eta^2\right\} dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\{\varphi_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ を $\dot{C}^1(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ に属する一次独立な関数系，S_m をそれらによって張られる線型空間とし第m近似解を(1.2)の形で求めることにすると良く知られているように，Dの境界が条件(A)をみたせば不等式

$$(2.3) \qquad \|u_m - \bar{u}\|_J \leq \|\hat{u}_m - \bar{u}\|_J$$

が任意の $\hat{u}_m \in S_m$ について成立する。すなわち Ritz-Galerkin 法によって得た近似解は(2.2)のノルムの意味で S_m 内での最

良近似である。

以上の事実を使って近似解の一様収束性を導きたいのであるが、次の定理は以下の議論のもとになるものである。

定理.1 (Kantrovich – Krylov [1])

Dを平面上の有界領域とする。$z(x,y)\in \dot{C}^1(D)$が次の条件をみたすとする。

(i) $\|z\|_J^2 \leq \varepsilon$

(ii) 2点(x,α)及び(x,β)を結ぶ線分がD内にあるようなすべてのα, βに関し、ある定数Kがあって

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy \leq K \quad 。$$

このとき$\overline{D}$で

$$|z(x,y)| \leq C_1\sqrt{\varepsilon \log\frac{dK}{\varepsilon}} + C_2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ただしdはDの直径、C_1, C_2は係数及びDにのみ関係する定数である。

(注意): $dK \geqq \varepsilon$を仮定するが$dK < \varepsilon$の場合には右辺の第一項を消した評価が可能である。尚、条件(ii)はもっと弱くできる([6])。

§3 ・チェビシェフ多項式の諸性質

次のことは良く知られている。

定理.2

$T_k(x)$をk次のチェビシェフ多項式とする。関数系

(3.1) $$\left\{ \frac{e_{k,s}}{\pi^2} T_k(x) T_s(y) \right\} \quad (k, s = 0, 1, 2, \cdots)$$

たゞし

(3.2) $$e_{k,s} = \begin{cases} 1 & (k = s = 0) \\ \sqrt{2} & (k \cdot s = 0,\ k \neq s) \\ 2 & (k \cdot s \neq 0) \end{cases}$$

は $L_T^2(S)$ における完備な正規直交系であって、この関数系による $u(x, y) \in L_T^2(S)$ のフーリエ式展開

(3.3) $$u(x, y) \sim \sum_{k,s=0}^{\infty} e_{k,s} A_{k,s} T_k(x) T_s(y)$$

たゞし

(3.4) $$A_{k,s} = \frac{e_{k,s}}{\pi^2} \iint_S u(x, y) T_k(x) T_s(y) d\varphi(x, y)$$

は $L_T^2(S)$ のノルムで $u(x, y)$ へ収束する。このとき Parseval の等式

(3.5) $$\| u \|_T^2 = \pi^2 \sum_{k,s=0}^{\infty} A_{k,s}^2$$

が成立する。

次の諸定理は一変数の場合の Urabe [2] の方法に沿って得ることができる。

<u>定理 3.1</u>

$u(x, y)$ を $\overline{S}$ で区分的に滑かな関数とする。u_x のチェビシェフ級数展開（(3.1) によるフーリエ式展開）を

$$(3.6)\qquad u_x(\cos\theta, \cos\tilde{\theta}) \sim \sum_{k,s=0}^{\infty} e_{k,s} A'_{k,s} \cos k\theta \cos s\tilde{\theta}$$

とすれば次の関係が成立する。

$$(3.7)\qquad A_{k,s} = \frac{1}{2k}\left(e_{k-1} A'_{k-1,s} - A'_{k+1,s}\right) \quad (k \geq 1,\ s \geq 0)$$

$$(3.8)\qquad A'_{k,s} = \frac{2}{e_k}\left[(k+1)A_{k+1,s} + (k+3)A_{k+3,s} + (k+5)A_{k+5,s} + \cdots\right] \quad (k, s \geq 0)$$

たゞし、$e_k = \sqrt{2}$ ($k=0$) or $e_k = 1$ ($k \neq 0$). u_yの展開係数$A''_{k,s}$に関しても同様な関係が成立する。

次に、$u \in L^2_T(S)$にたいし作用素$P_{m,n}$を次のように定める。

$$(3.9)\qquad P_{m,n}u \equiv \sum_{k,s=0}^{m,n} e_{k,s} A_{k,s} \cos k\theta \cdot \cos s\tilde{\theta}.$$

簡単にするために$P_{m,n}u$を$u_{m,n}$で、$P_{m,m}$をP_mで、$P_m u$をu_mでそれぞれ表わすことにする。

定理3.2

$u(x,y)$が前定理の仮定をみたすならば次の評価ができる。

$$(3.10)\qquad \|(I-P_m)u\|_T^2 \leq \frac{1}{(m+1)^2}\left[\|(I-P_{m-1})u_x\|_T^2 + \|(I-P_{m-1})u_y\|_T^2\right].$$

定理3.3

$u(x,y)$が定理3.1の仮定をみたすならば次の評価ができる。

$$(3.11)\qquad \left\|\frac{\partial}{\partial x}(u-u_m)\right\|_T^2 \leq \frac{m+2}{2}\|(I-P_{m-1})u_x\|_T^2 \quad (m \geq 1)$$

（略証）　定理の仮定のもとにチェビシェフ級数は一様収束

することが知られている（[4]）．　そこで $u-u_m$ を次のように表わすことができる。

$$(3.12)\qquad u-u_m=(I-P_m)u=\sum_{k \text{ or } s \geq m+1} e_{k,s} A_{k,s} \cos k\theta \cdot \cos s\tilde{\theta}.$$

次に $\frac{\partial}{\partial x}(u-u_m)$ のチェビシェフ級数展開を

$$(3.13)\qquad \frac{\partial}{\partial x}(u-u_m) \sim \sum_{k,s=0}^{\infty} e_{k,s} \overline{A}_{k,s} \cos k\theta \cdot \cos s\tilde{\theta}$$

とすれば，定理3.1 により右辺を次のように書き直せる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(u-u_m) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} A'_{m,0}$$

$$+\sqrt{2}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{m} A'_{m,s}\cos s\tilde{\theta} + \sum_{s=m+1}^{\infty} A'_{0,s}\cos s\tilde{\theta} + \sum_{k=m+1}^{\infty} A'_{k,0}\cos k\theta$$

$$+ A'_{m+1,0}(\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(m-1)\theta)$$

$$+ A'_{m,0}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos m\theta)\Big]$$

$$+2\Big[\sum_{\substack{k\geq m (s\neq 0)\\ \text{or } s\geq m+1 (k\neq 0)}} A'_{k,s}\cos k\theta\cdot\cos s\tilde{\theta} + \sum_{s=1}^{m} A'_{m+1,s}\cos\theta\cdot\cos s\tilde{\theta}$$

$$+\sum_{s=1}^{m} A'_{m,s}\cos 2\theta\cdot\cos s\tilde{\theta} + \sum_{s=1}^{m} A'_{m+1,s}\cos 3\theta\cdot\cos s\tilde{\theta} + \cdots$$

$$+\sum_{s=1}^{m} A'_{m+1,s}\cos(m-1)\theta\cdot\cos s\tilde{\theta}\Big].\quad (m：偶数と仮定)$$

これに Parseval の等式を使えばよい。　m が奇数の場合にも全く同様にできる。

定理3.4

$u(x,y)$ が $\overline{S}$ で一回連続的微分可能かつ２階の導関数が区分的に連続であれば次の評価ができる。

$$(3.14)\qquad \left\| \frac{\partial}{\partial x}(u-u_m) \right\|_T^2 \le \frac{m+2}{2m^2}\left[\left\| (I-P_{m-2})u_{xx} \right\|_T^2 + \left\| (I-P_{m-2})u_{xy} \right\|_T^2 \right]$$

定理 3.5

$u(x,y)$ が前定理の条件をみたすならば m 次の多項式 $p_m(x,y)$ があって次の order で近似できる.

$$(3.15)\qquad \left\| u(x,y)-p_m(x,y) \right\|_{1,L^2(S)}^2 \le \mathrm{Const.} \sum_{i,j} \left\| (I-P_{m-2})\partial_{ij}^2 u \right\|_T^2 \cdot \frac{1}{m}$$

$$\left(\partial_{ij}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\ \text{たゞし}\ x_1 = x\ ;\ x_2 = y \right)$$

§4　境界で 0 となる関数の近似.

この節では. D を有限個の長方形に分割できる領域で S に含まれているものとする. すなわち $dist.(\overline{D}, \partial S) > 0$. このような領域を R-type の領域と呼ぼう。 $\omega(x,y) \in \dot{C}^1(D)$ が次の諸条件をみたすとする.

(I)　$\omega(x,y) > 0 \qquad (x,y) \in D$

(II)　$\omega(x,y)$ は $\overline{D}$ で有界な一階導関数 ω_x, ω_y を持つ. 更に D 内の任意の部分閉領域で有界かつ区分的に連続な 2 階の導関数 $\omega_{xx}, \omega_{xy}, \omega_{yy}$ を持つ.

(III)　正数 $\bar{\delta}$, λ_1, λ_2, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ があって $\rho(x,y) = dist((x,y), \partial D) \le \bar{\delta}$ なるすべての $(x,y) \in D$ に関し

(i) $\left|\partial^2_{ij}\omega(x,y)\right| \leq \bar{c}_1 \rho(x,y)^{-\lambda_1}$ $\quad (i,j=1,2)$

(ii) $\omega(x,y) \geq \bar{c}_2 \rho(x,y)^{\lambda_2}$

となる。

以上の条件をみたす関数を作る事は困難なことではない.

([6]).

<u>定理.4.</u>

$u(x,y) \in \mathring{C}^2(D)$ が次の条件をみたすとする.

ある正数ρ_0があって

(a) $\rho(x,y) \leq \rho_0$ なるすべての$(x,y) \in D$ にたいし, 次のような定数$\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, κ_1, κ_2が存在する。

(i) $|u(x,y)| \leq \tilde{c}_1 \rho(x,y)^{\kappa_1}$ $\quad (\kappa_1 > \frac{1}{2})$

(ii) $|\partial_i u(x,y)| \leq \tilde{c}_2 \rho(x,y)^{-\kappa_2}$ $\quad (\kappa_2 < \frac{1}{2})$, $i=1,2$

$\left(\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right.$, ただし $\left.x_1 = x,\ x_2 = y\right)$

(b) $0 < \rho \leq \rho_0$ なるすべてのρにたいし次の如き定数$\tilde{c}_3$, κ_3が存在する.

(iii) $\displaystyle\iint_{D_\rho} \left|\partial^2_{ij} u(x,y)\right|^2 dx\,dy \leq \tilde{c}_3 \rho^{-\kappa_3}$ $\quad (\kappa_3 < 2)$

$D_\rho \equiv \{(x,y) \in D;\ dist((x,y), \partial D) \geq \rho\}$.

このとき, 正数α, $\tilde{c}_4$があって $u(x,y)$は $\omega(x,y)\,p_m(x,y)$ の形の関数により次の order で近似できる。

(4.1) $\quad \left\| u(x,y) - \omega(x,y)\,p_m(x,y) \right\|^2_{1, L^2(D)} \leq \tilde{c}_4\, m^{-\alpha} \quad (m \to \infty)$.

(略証)

単調減少して $\to 0$ となる数列 $\{\delta_m\}$ を作る。各々の n にたいして R-type の領域 D_m^i $(i=1,2,3,4)$ を次のように作る。

(4.2) $$D_m^i = \{(x,y)\in D\,;\, dist((x,y),\partial D) > i\,\delta_m\} \quad (i=1,2,3,4)$$

m が十分大きければ，$D_m^{i+1} \subset D_m^i \subset D$ かつ $4\delta_m < min(\rho_0, \bar{\delta})$ とできる．次に R^2 で区分的に滑かな関数列 $\{\hat{u}_m(x,y)\}$ で次の条件をみたすものが作れる（適当な補間により）．

(4.3) $$\begin{cases} \hat{u}_m(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{in } R^2 - D_m^2 \\ u(x,y) & \text{in } D_m^3 \end{cases} \\ \left.\begin{array}{l} |\hat{u}_m(x,y)| \leq \max_{\partial D_m^3} |u(x,y)| \\ |\partial_i \hat{u}_m(x,y)| \leq c_1\,\delta_m^{-K_4} \end{array}\right\} \text{in } D_m^2 - D_m^3 \quad (K_4 < \tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

この関数列より滑かな関数列 $\{\tilde{u}_m(x,y)\}$ を次のように作る。

(4.4) $$\tilde{u}_m(x,y) = \frac{1}{4\delta_m^2}\int_{-\delta_m}^{\delta_m}\int_{-\delta_m}^{\delta_m} \hat{u}_m(x+t, y+s)\,dt\,ds\,.$$

この関数の台は $\overline{D_m^1}$ にあるが，定理の仮定より $K_5 > 0$ があって

(4.5) $$\|u(x,y) - \tilde{u}_m(x,y)\|^2_{1,L^2(D)} \leq c_2\,\delta_m^{K_5}$$

(4.6) $$|\partial_y^2 \tilde{u}_m(x,y)| \leq c_3\,\delta_m^{-(1+K_4)} \quad \text{in } \overline{D}$$

となることが証明できる。

$$(4.7)\qquad v_m(x,y)=\frac{\tilde{u}_m(x,y)}{\omega(x,y)}$$

とおけば，$v_m(x,y)$は$\overline{D_m'}$に台を持つR^2での滑かな関数と見做される。従って定理3.5によりm次の多項式$p_m(x,y)$があって

$$(4.8)\qquad \| v_m(x,y)-p_m(x,y)\|_{1,L^2(D)} \le C(\partial_{ij}^2 v_m)\frac{1}{m} \qquad (m\to\infty)$$

とできる。$\delta_m=m^{-\bar{\alpha}}$とおき$m\to\infty$のとき$C(\partial_{ij}^2 v_m)=o(m)$となるように$\bar{\alpha}$を定める。$\omega(x,y)$にたいする仮定及び(4.6)により

$$(4.9)\qquad \bar{\alpha}<\frac{1}{2(1+K_4+\lambda_1+3\lambda_2)}$$

ととれば十分であることがわかる。このように$\bar{\alpha}$をとれば$K_6>0$があって

$$(4.10)\qquad \| \tilde{u}_m(x,y)-\omega(x,y)p_m(x,y)\|^2_{1,L^2(D)} \le C_4\ \delta_m^{K_6}$$

とでき(4.5)と併せて定理を得る。

(注意)：定理4の証明のためには領域DがR-typeという仮定は不要である。次の条件をみたせばよい([6])．

$$(4.11)\qquad \iint_{D-D_\delta} \rho^{-K}(x,y)\,dx\,dy=O(\delta^{1-K}) \qquad (\forall K<1) \quad \text{as } \delta\to 0.$$

§5　解の近似

定理5

Dを R-typeの領域とする。$u(x,y)$ は Dirichlet問題(1.1)の解で、定理4の諸条件並びに条件

(*)　2点 (x,α), (x,β) を結ぶ線分がD内にあるようなすべての α,β についてある定数Kがあって

$$(5.1)\qquad \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leq K < \infty .$$

をみたすならば（$u \in W_2^2(D)$ なら満足される）

$$(5.2)\qquad u_m(x,y) = \omega(x,y)\, p_m(x,y)$$

の形で求めた Ritz - Galerkin 近似は $m \to \infty$ のとき $\overline{D}$ で一様に解 $u(x,y)$ へ収束しその order は $O\left(\sqrt{m^{-\alpha}\log m}\right)$ $(\alpha>0)$ である。

証明は Markov の不等式[5] を使って

$$(5.3)\qquad \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \eta_m}{\partial y}\right)^2 dy \leq \mathrm{Const.}\left(M_0+M_m\right)^2 m^{6\lambda_2+4} + \mathrm{Const.}$$

ただし
$$\begin{cases} \eta_m = u - u_m \\ M_0 = \max\limits_{D} |u| \\ M_m = \max |\eta_m| \end{cases}$$

を導き定理.1を適用すればよい。

(注意)：領域Dにたいする仮定はもっと弱くできる。また、

定理1の条件(ii)を弱くする事により条件(*)は不要となる。更に定理4の条件(a)は領域Dの境界がPoincaré条件をみたせば満足される([3])。これらのことに関しては[6]を参照されたい。

REFERENCES

[1] Kantrovich,L.V. and Krylov,V.I. : Approximate method of higher analysis, Interscience Publ. Inc., 1958.

[2] Urabe,M. : Numerical solution of multi-point boundary value problems in Chebyshev series-Theory of the method, Numer.Math.,9,341-366 (1967).

[3] Ako,K.: On the modern and the classical solution of the Dirichlet problem,Japan J.Mayh.,36,85-97(1966).

[4] Hobson,E.W. : The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Dover Publ.Inc. 1957.

[5] Natanson,I.P. : Constructive theory of functions, Vol.II,Ungar 1964.

[6] Miyoshi, T. : On the convergence of Ritz-Galerkin's method (to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser.A, Vol.4, No.1).