

Miller の recurrence algorithm について

広大理 新谷尚義

§ 1. まえがき

2階の差分方程式

$$(1.1) \quad y_{k-1} = a_k y_k + b_k y_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots : b_k \neq 0)$$

の1次独立な解 f_k, g_k が

$$(1.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k}{g_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{k+1} g_k}{g_{k+1}} = \beta, \quad \alpha \neq \beta$$

という性質をもつ場合を考え, f_k を求める問題を取り扱う。

f_k の定数倍でない解は

$$(1.3) \quad y_k = a f_k + b g_k \quad (b \neq 0)$$

と表わされ,

$$(1.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k}{y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k/g_k}{b + a(f_k/g_k)} = 0$$

となる。 f_0, f_1 の近似値 y_0, y_1

$$(1.5) \quad y_0 = f_0 + \varepsilon_0, \quad y_1 = f_1 + \varepsilon_1$$

を使って $y_2, y_3, \dots$ を求めると, (3) 式で

$$(1.6) \quad a = 1 + (g_0 \varepsilon_1 - g_1 \varepsilon_0) / \Delta, \quad b = (f_1 \varepsilon_0 - f_0 \varepsilon_1) / \Delta, \quad \Delta = f_1 g_0 - f_0 g_1$$

の場合であるから, $b \neq 0$ ならば

$$(1.7) \quad |(y_k - f_k) / f_k| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

となり, y_k の相対誤差はいくらでも大きくなる。したがって, 漸化式(1)を k が増加する方向に使うのは好ましくないことになる。そこで J.C.P. Miller (1952) は, この漸化式を k が減少する方向に使うことを考えた。

$f_0, f_1, \dots, f_N$ の近似値が求めたいとき, 整数 $n (n \geq N)$ に対して $P_n(k)$ をつぎの式によって定義する。

$$(1.8) \quad P_n(k-1) = a_k P_n(k) + b_k P_n(k+1) \quad (k = n+1, n, \dots, 1)$$

$$(1.9) \quad P_n(n) = 1, \quad P_n(n+1) = 0, \quad P_n(n+2) = 1/b_{n+1}$$

1° 正規化条件

$$(1.10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} m_k f_k = C \quad (C \neq 0)$$

が知られているとき,

$$(1.11) \quad R_n = \sum_{j=0}^n m_j P_n(j),$$

$$(1.12) \quad S_n(k) = c P_n(k) / R_n \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

とおく。

2° f_0 の値が知られていて, $f_0 \neq 0$ のとき

$$(1.13) \quad T_n(k) = f_0 P_n(k) / P_n(0)$$

とおく。

すると

$$(1.14) \quad P_n(k) = \alpha_n f_k + \beta_n g_k$$

$$(1.15) \quad \alpha_n = g_{n+1} / \Delta_n, \quad \beta_n = -f_{n+1} / \Delta_n, \quad \Delta_n = f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n$$

である。

$$(1.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1/(\alpha - \beta), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

であるから、

$$(1.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = f_k / (\alpha - \beta)$$

$$(1.18) \quad S_n(k), T_n(k) \rightarrow f_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。

ここで、望む精度の f_k の近似値をうるためには、 n の値をいくらにとればよいかが問題になる。そのような n の値が知られていない場合には、 n の値を増して計算し直し、前にえられた結果と比較して、望む精度の近似値がえられたかどうかを調べる方法がよく使われる。

ここでは k を固定して n を増加させ、 $P_n(k)$, R_n を求める漸化式をまず導く。すると $S_n(N)$ と $S_n(N+1)$ をこの式によって計算し、望む精度の f_N , f_{N+1} の近似値になったところで、(1)式によって $f_k (k=N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0)$ の近似値を求めることができる。また、 $a_r > 0$, $b_r > 0$ ($r=1, 2, \dots$) の場合に相対誤差を評価しよう。

§ 2. 漸化式

帰納法によってつぎの結果を示すことができる。

定理 1. $P_n(k)$ ($n=k-1, k, \dots$) はつぎの漸化式をみたす。

$$(2.1) \quad P_{n+1}(k) = a_{n+1}P_n(k) + b_nP_{n-1}(k) \quad (n+1 \geq k \geq 0)$$

$$(2.2) \quad P_k(k) = 1, \quad P_{k-1}(k) = 0, \quad P_{k-2}(k) = 1/b_{k-1}$$

また,

$$(2.3) \quad U_n(k) = \sum_{j=k}^n m_j P_n(j) \quad (n \geq k)$$

とおくと、つぎの結果がえられる。

定理 2. $U_n(k)$ ($n=k, k+1, \dots$) はつぎの漸化式をみたす。

$$(2.4) \quad U_{n+1}(k) = a_{n+1}U_n(k) + b_nU_{n-1}(k) + m_{n+1} \quad (n \geq k)$$

$$(2.5) \quad U_{k-1}(k) = 0, \quad U_k(k) = m_k$$

$R_n = U_n(0)$ であるから、つぎの系がえられる。

系 R_n ($n=0, 1, 2, \dots$) はつぎの漸化式をみたす。

$$(2.6) \quad R_{n+1} = a_{n+1}R_n + b_nR_{n-1} + m_{n+1}$$

$$(2.7) \quad R_{-1} = 0, \quad R_0 = m_0$$

(1)式と(6)式によって、 k を固定して n を増加させながら

$S_n(k)$ と $T_n(k)$ を計算することができる。

したがって f_k の近似値を望む精度で求めることができる。

また, (1) 式によって $P_n(N), P_n(N+1)$ が求めていると, (1.8)

式によって $P_n(j)$ ($j=N-1, N-2, \dots, 0$) を計算することができる。

§ 3. 正係数の場合

この節では

$$(3.1) \quad a_n > 0, \quad b_n > 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

である場合を考える。たとえば $I_n(x)$, $i_n(x)$, $i_n^{\text{erfc } x}$ に対する漸化式はこの条件をみたしている。簡単な計算でつぎの補題がえられる。

補題

$$f_{N+1}/f_N = r$$

$$(3.2) \quad P_n(N+1)/P_n(N) = r_n = r(1+e_n) \quad (n \geq N+1)$$

とおく, すると, つぎの式が成り立つ。

$$(3.3) \quad \frac{P_n(k)}{f_k} = (1+d_k e_n) \frac{P_n(N)}{f_N} \quad (k=0, 1, \dots, N+1)$$

$$(3.4) \quad 0 = d_N < d_{N-2} < \dots < d_0 < \dots < d_{N-1} < d_{N+1} = 1$$

$$(3.5) \quad -1 = e_N < e_{N+2} < \dots < 0 < \dots < e_{N+3} < e_{N+1}$$

ただし

$$(3.6) \quad d_k = \frac{r b_N P_{N-1}(k)}{P_N(k) + r b_N P_{N-1}(k)}$$

である。

定理 3. f_0^* を f_0 の近似値とし

$$f_0^* = f_0(1+c) \quad (|c| \leq c_0 < 1)$$

$$(3.7) \quad T_n^*(k) = \frac{f_0^* P_n(k)}{P_n(0)} = (1+e_{n,k}) f_k \quad (k=0,1,\dots,N+1)$$

とおく。すると

$$(3.8) \quad n = N + 1 + 2q \quad (q \geq 1)$$

であるような n に対して、つぎの式が成り立つ。

$$(3.9) \quad (1+c)(1-e_n) < 1+e_{n,k} < (1+c)(1+e_n)$$

$$(3.10) \quad \frac{r_n - r_{n+2}}{r_n} < e_n < \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}}$$

(証明) (3) 式によってつぎの式がえられる。

$$(3.11) \quad 1+e_{n,k} = (1+c) \frac{1+d_k e_n}{1+d_0 e_n} = (1+c) \left[1 + \frac{(d_k - d_0)}{1+d_0 e_n} e_n \right]$$

(8) 式がみたされていると、

$1+d_0 e_n > 1$ であり、(4) 式によって $|d_0 - d_k| < 1$ となる。

したがって

$$\left| \frac{d_k - d_0}{1 + d_0 e_n} \right| < 1$$

となる。

$$-1 < e_{n-1} < 0, \quad 0 < e_{n+2} < e_n$$

であるから,

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{e_n - e_{n-1}}{1 + e_{n-1}} > e_n$$

$$\frac{r_n - r_{n+2}}{r_{n+2}} = \frac{e_n - e_{n+2}}{1 + e_{n+2}} < e_n$$

である。

(証終)

$$e_{n,k} < e_n(1+c)+c \leq e_n(1+c_0)+c_0$$

$$e_{n,k} > -e_n(1+c)+c \geq -e_n(1+c_0)-c_0$$

であるから, つぎの系がえられる。

系 条件 (3.8) の下で, 正数 μ ($\mu > c_0$) に対して

$$(3.12) \quad e_n \leq \frac{\mu - c_0}{1 + c_0}$$

ならば,

$$(3.13) \quad |e_{n,k}| < \mu \quad (k=0, 1, \dots, N+1)$$

が成り立つ。

定理 4.

$$(3.14) \quad S_n(k) = f_k(1 + \delta_{n,k})$$

とおき, 正数 μ に対して

$$(3.15) \quad |\delta_{n,N}| \leq \mu, \quad |\delta_{n,N+1}| \leq \mu$$

ならば,

$$(3.16) \quad |\Delta_{n,k}| \leq \mu \quad (k=0,1,\dots,N+1)$$

が成り立つ。

(証明) (3)式によって

$$(3.17) \quad \Delta_{n,k} = \Delta_{n,N} + d_k e_n (1 + \Delta_{n,N}) \quad (k=0,1,\dots,N+1)$$

であり, $d_{N+1} = 1$ であるから

$$e_n (1 + \Delta_{n,N}) = \Delta_{n,N+1} - \Delta_{n,N}$$

がえられる。この式を (17) 式に代入すると

$$\Delta_{n,k} = d_k \Delta_{n,N+1} + (1 - d_k) \Delta_{n,N}$$

となる。 $0 \leq d_k \leq 1$ であるから, (16) 式がえられる。

(証明終)

References

- [1] Gautschi, W. : Computational aspects of three-term recurrence relations, SIAM Rev., 9(1967), 24-82.
- [2] Oliver, J. : Relative error propagation in the recursive solution of linear recurrence relations, Numer. Math., 9(1967), 323-340.
- [3] Olver, F.W.J. : Numerical solution of second-order linear difference equations, J. Res. Nat. Bur. Standards - B, 71(1967), 111-129.
- [4] Shintani, H. : Note on Miller's recurrence algorithm, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 29(1965), 121-133.
- [5] Tait, R.J. : Error analysis of three term recurrence equations, Math. Comp., 21(1967), 629-638.