数理解析研究所講究録
45巻 1968年 89-96

non-convex orientor field について

神大 理 菊池紀夫

§1. orientor field

Vector field $f(t,x)$, $(t,x)\in R\times R^n$, が R^n にあたえられているとする。微分不等式

$$\left|\frac{dx}{dt}-f(t,x)\right|\leqq\varepsilon$$

を書きあらためると

$$\frac{dx}{dt}\in V(f(t,x),\varepsilon)$$

ここに

$$V(y,\varepsilon)=\{z\in R^n;|y-z|\leqq\varepsilon\},$$

とする。$V(f(t,x),\varepsilon)$ を $F(t,x)$ と書くと、$F(t,x)$ は $f(t,x)$ を中心とし半径 ε の球であり、それが各点 $(t,x)\in R\times R^n$ にあたえられたことになる。これを一般にして各点 $(t,x)\in R\times R^n$ にたいして R^n の集合 $F(t,x)$ をたいおうさせるとき $F(t,x)$, $(t,x)\in R\times R^n$, を R^n における

orientor field とよぶ。また，この orientor field $F(t, x)$ にたいおうした，次の関係

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$$

のことを contingent equation とよぶ。

この contingent equation は 40 年程前に福原先生によって，はじめて導入されたものである。

§2. contingent equation と制御問題

制御函数のはいった微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega,$$

ただし，$x, f \in R^n$，$\Omega \subset R^r$，$u = u(t)$ は可測函数，があたえられているとする。ある制御函数 $u = u(t)$ にたいおうして，上の微分方程式をみたす $x = x(t)$ は次の contingent equation をみたす。

$$\frac{dx(t)}{dt} \in f(t, x(t), \Omega) = F(t, x(t))$$

逆に，この contingent equation をみたす $x = x(t)$ にたいして，

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega$$

をみたす様に，可測函数 $u = u(t)$ を選びだすことができれば（陰函数の定理を用いる）制御系方程式と contingent equation との解の族が一致することになる。

この様に見ると、制御系方程式について調べることを、Contingent equation について調べることに帰着させることができる。

§3. 記号と定義

R^n の closed sets (compact sets) 全体の集合を $Cl(R^n)$ ($Comp(R^n)$) であらわす。

R^n の集合 A にたいして、$conv A$ は A を含む最小の closed-convex set を、$bdry A$ は A の boundary をあらわす。

$Cl(R^n) \ni A, B$ にたいして、

$$Dist(A, B) = \inf\{\delta > 0 ; V(A, \delta) \supset B, V(B, \delta) \supset A\}$$

ここに、

$$V(A, \delta) = \{x \in R^n ; dist(x, A) \leqq \delta\},$$

$$dist(x, A) = \inf\{|x-y| ; y \in A\},$$

を A と B との間の (Hausdorff の) 距離とする。

$$|A| = Dist(A, O)$$

とおく。ただし、O は R^n の原点である。

定義 1. 位相空間 T で定義された函数 $F(t) \in Cl(R^n)$ が $t_0 \in T$ で連続であるというのは、

任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，t_0 の近傍 U が存在して

$$\mathrm{Dist}\,(F(t),\ F(t_0)) < \varepsilon$$

が U のすべての t にたいして成りたつことをいう。T のすべての点で $F(t)$ が連続のとき，$F(t)$ は T で連続であるという。

定義 2．可測空間 E で定義された函数 $F(t) \in Cl(R^n)$ が E で可測であるというのは，すべての $C \in Cl(R^n)$ にたいして，集合

$$\{ t \in E;\ F(t) \cap C \neq \phi \}$$

が E で可測のことである。

I は区間 $[t_0, t_0 + a]$ をあらわす。a.e. I は'I 上のほとんどいたる所'を意味する。

仮定 H(F)．$F(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され，値を $Comp(R^n)$ にとる函数で，t に関しては可測，x に関しては連続である。また，I で積分可能な函数 $k(t)$ が存在し，

$$|F(t, x)| \leqq k(t) \qquad \text{a.e. } I$$

が成りたつ。

定義 3.　$F(t) \in Comp(R^n)$ は I で可測とする。I で積分可能な函数 $h(t)$ が存在し，

$$|F(t)| \leqq h(t) \quad a.e.\ I$$

が成りたつ。このとき，$F(t)$ が可測であるので，可測な函数 $f(t) \in F(t)$ を選びだすことができ，この様な函数 f の全体の集合を M であらわす。I 上の $F(t)$ の積分を次の様に定義する。

$$\int_I F(t)\,dt = \left\{ \int_I f(t)\,dt;\ f \in M \right\}.$$

定義 4.　I で定義された絶対連続な函数 $x = x(t)$ が次の関係

$$x(t) \in x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, x(t))\,dt \quad \text{on } I$$

をみたすとき，$x = x(t)$ は初期条件 $x(t_0) = x_0 \in R^n$ をみたす，orientor field $F(t, x)$ の trajectory という。

$T(A, F)$ $(A \subset R^n)$ は初期条件 $x(t_0) \in A$ をみたす，$F(t, x)$ の trajectories 全体の集合をあらわし，$Z(A, F)$ はそれらの graphs $(\subset I \times R^n)$ の和集合をあらわす。$\tau \in I$ にたいして，

$$S(A, F, \tau) = Z(A, F) \cap \{t = \tau\}$$

とおく。

§4. trajectory の幾つかの性質

定理1から4までは $H(F)$ を仮定する。

定理 1. すべての $x_0 \in R^n$ にたいして，初期条件 $x(t_0) = x_0$ をみたす $F(t, x)$ の trajectory が I 全体において存在する。

定理 2. $A \in Comp(R^n)$ ならば，$T(A, F)$ は一様収束の位相で compact である。

定理 3 (Kneser). $Comp(R^n) \ni A$ が連結しているならば，すべての $\tau \in I$ にたいして，$S(A, F, \tau)$ は連結体である。

定理 4 (Hukuhara). $bdry\, Z(A, F)$ 上のすべての点は $bdry\, Z(A, F)$ の上ばかり通る trajectory $x(t)$ で $bdry\, A$ と結ぶことができる。しかもこの $x(t)$ はその部分のほとんどいたる所で，次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in bdry\, conv\, F(t, x(t)) \quad a.e.$$

をみたす。

定理 5. $F(t, x) \in Cl(R^n)$ は $I \times R^n$ で定義され t に関して可測である。I で積分可能な函数 $k(t)$ が存在して、

$$\mathrm{Dist}(F(t, x), F(t, x')) \leqq k(t)|x - x'|$$

が成りたつとする。このとき、次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \quad a.e. \qquad x(t_0) = x_0$$

をみたす絶対連続な函数 $x(t)$ が(局所的に)存在する。

なお、比較定理も成立すると予想されるので、trajectory の存在範囲なども調べられると思われる。

制御系方程式と contingent equation の関係について、詳しくは Hukuhara [2], Wazewski [6] を参照されたい。

Compact-convex set value な函数論は Hukuhara [3], [4]. にある。

参考文献

[1] Filippov, A. F., Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, SIAM J. Control, 5 (1967), 609–621.

[2] Hukuhara, M., Équation au contingent et systeme de commande, 数理解析研究所講究録 11 (1966), 1–21.

[3] ______________, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, RIMS-11, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[4] ______________, Integration des application measurables dont la valeur est un compact convexe, RIMS-15, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[5] Kikuchi, N., On non-convex orientor fields satisfying the Carathéodory type conditions.

[6] Wazewski, T., On an optimal control problem, Differential Equations and Their Applications: Proceedings of the Conference held in Prague, September 1962 (1963), 229–243.