数理解析研究所講究録
46巻 1968年 88-107

Invariance Theory と modified minimax Principle について

早大理工学部　草間時武

序　これは Oscar Wesler : Invariance Theory and a modified minimax Principle A.M.S の紹介である.

§1. 統計的問題 $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P, A, \mathcal{O}\!\iota, L)$ とは

i) Z は実験のすべての可能な結果の全体, $\mathcal{B}$ は Z の部分集合のなす σ-field, Ω はパラメーター空间, P は $\mathcal{B}\times\Omega$ で定義された関数で $\omega\in\Omega$ を fix すると P_ω は $(Z, \mathcal{B})$ 上の prob measure になるとする. $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P)$ を標本空間という.

ii) A は行動空间で $\mathcal{O}\!\iota$ は A の部分集合のなす σ-field である.

iii) 損失関数 L は $\Omega\times A$ で定義された関数で ω を fix すると $L(\omega, a)$ は非負の $\mathcal{O}\!\iota$-可測関数になるとする.

$(\mathcal{G}, \gamma_Z, \gamma_\Omega, \gamma_A)$ は次の性質をみたすとき統計的問題の

許容群 または統計的問題は群 $\mathcal{G}$ の下で不変という.

i) $\mathcal{G}$ は群である.

ii) γ_Z は $\mathcal{G}$ の Z から Z の上への 1:1, かつ $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$ 可測な変換の全体への同型写像, γ_Ω は $\mathcal{G}$ の Ω から Ω の上への 1:1 変換の全体への同型写像, γ_A は $\mathcal{G}$ の A から A の上への 1:1, かつ $\mathcal{O}\!\iota$-$\mathcal{O}\!\iota$ 可測な変換の全体への同型写像とする. $g \in \mathcal{G}$ に対して $\gamma_Z(g)$, $\gamma_\Omega(g)$, $\gamma_A(g)$ をそれぞれ g_Z, g_Ω, g_A で表わすことにする.

iii) $g \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $P(g_Z B \mid g_\Omega(\omega)) = P(B \mid \omega)$

iv) $g \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $L(g_\Omega(\omega), g_A(a)) = L(\omega, a)$

$\mathcal{O}\!\iota \times Z$ 上で定義され $[0, 1]$ を値域とする関数 $\varphi(T \mid z)$ が z を fix すると $(A, \mathcal{O}\!\iota)$ 上の prob measure となり T を fix すると z の $\mathcal{B}$-可測関数となるとき確率化された決定関数といわれる. Φ で確率化された決定関数の全体を表わす.

$\omega \in \Omega$ と $\varphi \in \Phi$ に対して危険関数

$$\rho(\omega, \varphi) = \int_Z \int_A L(\omega, a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_\omega(z)$$

が定義される.

$g \in \mathcal{G}$ に対して $\varphi \in \Phi$ から $g_\Phi \varphi \in \Phi$ を次のように作ることができる.

$$(g_\Phi \varphi)(T \mid z) = \varphi(g_A T \mid g_Z(z))$$

このとき $\rho(\omega,\ g_\Phi \varphi) = \rho(g_\Omega(\omega),\ \varphi)$ がなりたつ.

これは次の計算でわかる.

$$\rho(\omega,\ g_\Phi \varphi) = \int_Z \int_A L(\omega,\ a)\, d g_\Phi \varphi(a \mid z)\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(\omega,\ a)\, d\varphi(g_A(a) \mid g_Z(z))\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(\omega,\ g_A^{-1}(a))\, d\varphi(a \mid g_Z(z))\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega),\ a)\, d\varphi(a \mid g_Z(z))\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega),\ a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_\omega g_Z^{-1}(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega),\ a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_{g_\Omega(\omega)}(z)$$

$$= \rho(g_\Omega(\omega),\ \varphi)$$

$\varphi(\in\Phi)$ は $g_{\Phi}\varphi=\varphi$ がすべての $g(\in\mathcal{G})$ でなりたつとき不変（invariant）であるという．すなわち

$$\varphi(g_A T \mid g_Z(z)) = \varphi(T \mid z)$$

がすべての g, z, T でなりたつことである．　このときあきらかに $\rho(\omega, \varphi)=\rho(\omega, g_{\Phi}\varphi)=\rho(g_{\Omega}(\omega), \varphi)$ がなりたつ．

$\omega\in\Omega$ に対して $S_\omega=\{g_{\Omega}(\omega) \mid g\in\mathcal{G}\}$ とおく．任意の $\omega, \omega'\in\Omega$ に対して $S_\omega=S_{\omega'}$ か $S_\omega\cap S_{\omega'}=\phi$ がなりたつ．何故ならば $S_\omega\cap S_{\omega'}\neq\phi$ とする．　$\omega_1\in S_\omega\cap S_{\omega'}$ を一つとると $\omega_1=g_{1\Omega}(\omega)=g_{2\Omega}(\omega')$ となる $g_1, g_2\in\mathcal{G}$ が存在する．$\tilde{\omega}\in S_\omega$ に対して $\tilde{\omega}=\tilde{g}_{\Omega}(\omega)=\tilde{g}_{\Omega}g_{1\Omega}^{-1}g_{2\Omega}(\omega')$ だから $\tilde{\omega}\in S_{\omega'}$．故に $S_\omega\subset S_{\omega'}$．　同様にして $S_{\omega'}\subset S_\omega$　$\therefore S_\omega=S_{\omega'}$．

このことから Ω はたがいに素な集合の和となる．これを $\Omega=\bigcup_{s\in S}\Omega_s$ とおく．　$\omega\in\Omega_s$ とすると $\Omega_s=\{g(\omega) \mid g\in\mathcal{G}\}$ である．Ω_s を orbit という．φ が不変ならば一つの orbit 上で危険関数は一定である．

§2.　$\varphi, \psi\in\Phi$ がすべての $s\in S$ で

$$\sup_{\omega\in\Omega_s}\rho(\omega, \varphi) \leqq \sup_{\omega\in\Omega_s}\rho(\omega, \psi)$$

となるとき φ は ψ と modified minimax sense において

少なくとも同程度に良い (at least as good as) という.
本文においては「同程度によい」「許容性」「完全類」等の言葉は modified minimax sense において使うことにする.
この節では §1 のおぜん立ての他に P_w が $(Z, \mathcal{B})$ 上の σ-有限な測度 ν によって dominate されている場合を考える.
Halmos - Savage の定理により ν を P_w $(w \in \Omega)$ と equivalent な測度と假定してさしつかえない. すなわちすべての $w \in \Omega$ で $P_w(B) = 0$ ならば $\nu(B) = 0$ と假定する.
不変な φ の定義において

$$\varphi(g_A T / g_z(z)) = \varphi(T / z)$$

がすべての z においてなりたたなくても ν に関してほとんどすべての z でなりたてばよい. (危険関数は変らないから). 上の等式がなりたたぬような z の集合が g に依存してもよい φ をほとんど不変な決定関数という. ほとんど不変な決定関数の全体を Φ^*, 不変な決定関数の全体を Φ^{**} で表わす.
$\mathcal{C}$ を $\mathcal{G}$ 上の σ-field とする. $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ 上の prob measure の net $\{\mu_\alpha\}$ が漸近的右不変であるとは, すべての $C \in \mathcal{C}$ と $g \in \mathcal{G}$ に対して

$$\lim_\alpha \{\mu_\alpha(Cg) - \mu_\alpha(C)\} = 0$$

となることである.

一般化された Hunt - Stein の定理

$(\mathcal{Z}, \mathcal{B}, \Omega, P, A, \mathfrak{A}, L)$ を $\mathcal{G}$ によって不変な統計的問題とする.

i) A は可分, 局所コンパクトな距離空間, $\mathfrak{A}$ は A のコンパクト集合から生成された σ-field, $L(\omega, a)$ は a に関して連続, すべての $c < \infty$ で $\{a \mid L(\omega, a) \leqq c\}$ はコンパクトとする.

ii) $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ 上に漸近的右不変な prob measure の net $\{\mu_\alpha\}$ が存在する

このとき Φ^* は modified minimax sense において本質的完全である. 更につけくわえて

iii) $\mathcal{G}$ は局所コンパクト, σ-コンパクトな位相群, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{G}$ のコンパクト集合から生成されているとする.

このとき Φ^{**} は modified minimax sense において本質的完全である (この部分の証明は省略する)

証明 $\varphi \in \Phi$ を一つ考える. φ とすくなくとも同程度によい $\varphi^* \in \Phi^*$ をみつければよい. 先ず $\sup\limits_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) < m_s$ $(< \infty)$ と仮定してさしつかえない. 何故なら $\sup\limits_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) < \infty$ なる orbit のみに着目してそこで φ の改良 φ^* をつくれば当然 $\sup\limits_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) = \infty$ なる orbit では

$\sup_{\omega\in\Omega_S}\rho(\omega,\varphi^*) \leqq \sup_{\omega\in\Omega_S}\rho(\omega,\varphi)$ がなりたつからである.

数段階にわけて証明しよう

A)　$\rho(\omega, g_\Phi\varphi) = \rho(g_\Omega(\omega),\varphi)$ であるから $\sup_{\omega\in\Omega_0}\rho(\omega, g_\Phi\varphi)$

$= \sup_{\omega\in\Omega_0}\rho(\omega,\varphi)$ がなりたつ.

すべての α に対して

$$\varphi_\alpha(T\,|\,z) = \int_{\mathcal{G}}\varphi(g_A(T)\,|\,g_Z(z))\,d\mu_\alpha(g)$$

と定義する.

$$\rho(\omega,\varphi_\alpha) = \int_Z\int_A L(\omega,a)\,d\varphi_\alpha(a\,|\,z)\,dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z\int_0^\infty \varphi_\alpha(\{a\,|\,L(\omega,a)>h\}\,|\,z)\,dh\,dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z\int_0^\infty\int_{\mathcal{G}}\varphi(\,g_A\{a\,|\,L(\omega,a)>h\}\,|\,g_Z(z))\,d\mu_\alpha(g)\,dh\,dP_\omega(z)$$

$$= \int_{\mathcal{G}}\int_Z\int_0^\infty\varphi(\,g_A\{a\,|\,L(\omega,a)>h\}\,|\,g_Z(z))\,dh\,dP_\omega(z)\,d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}}\int_Z\int_0^\infty g_\Phi\varphi(\{a\,|\,L(\omega,a)>h\}\,|\,z)\,dh\,dP_\omega(z)\,d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}}\int_Z\int_A L(\omega,a)\,dg_\Phi\varphi(a\,|\,z)\,dP_\omega(z)\,d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \rho(w, g_{\Xi}\varphi)\, d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \rho(g_\Omega(w), \varphi)\, d\mu_\alpha(g)$$

$$\leqq \sup_{g \in \mathcal{G}} \rho(g_\Omega(w), \varphi)$$

$$= \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi) \qquad (\Omega_s \text{ は } w \text{ のぞくする orbit})$$

故に $\displaystyle \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi_\alpha) \leqq \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi) \qquad s \in S$

φ_α は φ と少くとも同程度に良い.

B) すべての有界な $\mathcal{B}$-可測関数の全体 $L^\infty(\nu)$ は ν-可積分関数全体 $L^1(\nu)$ の共軛空間であり $L^\infty(\nu)$ に次の近傍系による位相（弱＊位相）を導入したとき $L^\infty(\nu)$ の単位球 $\{\varphi \mid \|\varphi\| \leqq 1\}$ はコンパクトとなる.（Alaoglu）

$$V(\varphi \mid f_1, \cdots f_n, \varepsilon) = \left\{\varphi' \,\middle|\, \left|\int_Z \varphi(x) f_i(x) d\nu(x) - \int_Z \varphi'(x) f_i(x) d\nu(x)\right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots n\right\}.$$

$\mathcal{K}$ を A のコンパクト集合の全体とする. $K \in \mathcal{K}$ に対して $\varphi(K \mid z)$ は z の関数とみて $L^\infty(\nu)$ の単位球 $\mathcal{V}$ にぞくする. $\varphi(K \mid z)$ を $L^\infty(\nu)$ の元とみたとき φ_K とかくことにする. $\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$ で φ を代表させる, すなわち φ_K

をφの座標とみると$\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$はコンパクト集合$\mathfrak{V}$の$\mathcal{K}$の濃度だけの直積（チコノフの定理によりコンパクト）の中の元と考えることができる．故に$\{\varphi_\alpha\}$をコンパクト集合におけるnetと考えてその集積点$\overline{\varphi}$が存在する．$\overline{\varphi}$は$K \in \mathcal{K}$に対して$L^\infty(\nu)$（正確には$\mathfrak{V}$）を定める．

$\overline{\varphi}$が$\{\varphi_\alpha\}$の集積点であるから有限個の$f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^1(\nu)$と有限個の$K_1, \cdots, K_m \in \mathcal{K}$と$\varepsilon > 0$に対して$\alpha_0$が存在して$\alpha > \alpha_0$ならば

$$\left| \int_Z \varphi_\alpha(K_i \mid z) f_j(z)\, d\nu(z) - \int_Z \overline{\varphi}(K_i \mid z) f_j(z)\, d\nu(z) \right| < \varepsilon$$

$i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

がなりたつ．

$\overline{\varphi}$は決定関数とはかぎらない。

$\overline{\varphi}$の性質として

1) $K_1 \subset K_2$ ならば $\overline{\varphi}_{K_1} \leqq \overline{\varphi}_{K_2}$ $\quad (a.e.\ \nu)$

2) $K_1 \cap K_2 = \phi$ ならば $\overline{\varphi}_{K_1 \cup K_2} = \overline{\varphi}_{K_1} + \overline{\varphi}_{K_2}$ $\quad (a.e.\ \nu)$

3) $\overline{\varphi}_K \leqq 1$

がなりたつ．この三つの性質は$\varphi \in \Phi$ならば勿論なりたつ．

今2)を証明しておく．

f を $\in L^1(\nu)$ かつ $f(z) > 0$ $(\forall z \in Z)$ なる関数となる. ν が σ-有限な測度だからかかる f は存在する.

$$g(z) = f(z)\left[\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 \mid z) - \bar{\varphi}(K_1 \mid z) - \bar{\varphi}(K_2 \mid z)\right]$$

とすると $f \in L^1(\nu)$, [ ] は有界だから $g \in L^1(\nu)$ である.

$$\int_Z g(z)\left[\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 \mid z) - \bar{\varphi}(K_1 \mid z) - \bar{\varphi}(K_2 \mid z)\right] d\nu(z)$$

$$-\int_Z g(z)\left[\varphi_\alpha(K_1 \cup K_2 \mid z) - \varphi_\alpha(K_1 \mid z) - \varphi_\alpha(K_2 \mid z)\right] d\nu(z)$$

$$\longrightarrow 0$$

ところが $\varphi_\alpha(K_1 \cup K_2 \mid z) - \varphi_\alpha(K_1 \mid z) - \varphi_\alpha(K_2 \mid z) = 0$ だから

$$\int_Z g(z)\left[\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 \mid z) - \bar{\varphi}(K_1 \mid z) - \bar{\varphi}(K_2 \mid z)\right] d\nu(z)$$

$$= 0$$

$g(z)$ を定義にもとづいて書きなおして

$$\int_Z f(z)\left[\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 \mid z) - \bar{\varphi}(K_1 \mid z) - \bar{\varphi}(K_2 \mid z)\right]^2 d\nu(z) = 0$$

$f(z) > 0$ だから

$$\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 \mid z) = \bar{\varphi}(K_1 \mid z) + \bar{\varphi}(K_2 \mid z) \qquad (a.e.\ \nu)$$

$\bar{\varphi}$ から $\varphi^* \in \Phi$ を作ることを考える.

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ の可算部分集合で

i) $K_1, \ldots\ldots, K_n \in \mathcal{R}$ なら $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{R}$

ii) 任意の開集合 U に対して可算個の $K_1, K_2, \ldots\ldots \in \mathcal{R}$ が存在して $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^{\circ}$ かつ $K_i \subset U$ $(i=1,2,\cdots)$.

かかる $\mathcal{R}$ の存在は次のようにして証明できる.

Aは可分だから稠密な可算集合 $\{a_i \mid i=1,2,\cdots\}$ が存在する. a_i の ε 近傍 $V_\varepsilon(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_\varepsilon(a_i)}$ がコンパクトなものの全体を $E_1, E_2, \cdots\cdots$ とし　　. $\overline{E}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ を $\cap$ や $\cup$ や (　　) で有限回の操作で結びつけたものの全体を $\mathcal{R}$ とすれば $\mathcal{R}$ はあきらかに i) をみたしている. O を任意の開集合とする. O にふくまれる a_i に対して a_i の ε 近傍 $V_\varepsilon(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_\varepsilon(a_i)}$ がコンパクト, かつ $\overline{V_\varepsilon(a_i)} \subset O$ となるものの全体を $S_1, S_2, \cdots$ とすると $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である. その理由は q を O の任意の点とする. $\overline{V_\varepsilon(q)}$ はコンパクト, $\overline{V_\varepsilon(q)} \subset O$ なる ε をとり $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ なる有理数と $V_r(q) \ni a_j$ なる a_j に対して $V_r(a_j)$ を考えると $\overline{V_r(a_j)} \subset \overline{V_\varepsilon(q)} \subset O$, $q \in V_r(a_j)$ である. $V_r(a_j)$ は $S_1, S_2, \cdots$ の中にぞくするから $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である. $\overline{V_r(a_j)} \in \mathcal{R}$ であるから ii) が証明された.

Aの任意の開集合Uに対して

$$\varphi^*(U \mid z) = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathcal{R}}} \overline{\varphi}(R \mid z)$$

と定義する. $\mathcal{R}$は可算集合だから$\varphi^*(U|z)$は$\mathcal{B}$-可測である. 任意の集合Wに対しては

$$\varphi^*(W|z) = \inf_{\substack{U \supset W \\ U = \text{open}}} \varphi^*(U|z)$$

と定義する. φ^*を$\mathcal{O}_\iota$に限定するとzをfixしたとき$\varphi^*(\cdot|z)$は$\mathcal{O}_\iota$上の**測度**となり, zに関して$\mathcal{B}$-可測になる. コンパクト集合Kに対しては$\varphi_K^* \geqq \overline{\varphi}_K$ $[\nu]$であることを示そう. Uを$K \subset U$なる任意の開集合とする. Uは$U = \bigcup_{R_i \subset U} R_i^\circ$と書ける. $K \subset \bigcup_{R_i \subset U} R_i^\circ$であるから$K \subset \bigcup_{i=1}^n R_i^\circ$となる$n$が存在する. ここに$R_i \in \mathcal{R}$である. したがって$K \subset \bigcup_{i=1}^n R_i = R \in \mathcal{R}$がなりたち$\overline{\varphi}_K \leqq \overline{\varphi}_R$ $[\nu]$がなりたつ. 一方$R \subset U$であるから$\varphi_U^* = \sup_{\substack{R' \subset U \\ R' \in \mathcal{R}}} \overline{\varphi}_{R'} \geqq \overline{\varphi}_R \geqq \overline{\varphi}_K$ $[\nu]$. Aが距離空間であるから, $K = \bigcap_j U_j \downarrow$となる開集合列$U_j$が存在する. 故に$\varphi_K^* = \lim_{j \to \infty} \varphi_{U_j}^*$. したがって前の不等式もつかって

$$\varphi_K^* = \lim_{j \to \infty} \varphi_{U_j}^* \geqq \overline{\varphi}_K \quad [\nu] \quad \text{がなりたつ}$$

次に$\varphi^*(A|z) = 1$ $[\nu]$であることを証明しよう. $\omega \in \Omega_s$とし$K = \{a ; L(\omega, a) \leqq m_s/\varepsilon\}$とすると

$$\int_Z \varphi_\alpha(K|z) dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

がなりたつ　その理由は $\rho(\omega, \varphi_\alpha) \leqq m_s$ だから

$$\int_Z \int_{K^c} L(\omega, a)\, d\varphi_\alpha(a \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq m_s$$

故に

$$\frac{m_s}{\varepsilon} \int_Z \varphi_\alpha(K^c \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq m_s$$

故に
$$\int_Z \varphi_\alpha(K^c \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq \varepsilon$$

一方
$$\int_Z \varphi_\alpha(A \mid z)\, dP_\omega(z) = 1$$

故に
$$\int_Z \varphi_\alpha(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

$dP_\omega(z) = p(z \mid \omega)\, d\nu(z)$, $p(\cdot \mid \omega) \in L^1(\nu)$ であることと
$\bar{\varphi}$ は φ_α の極限点であることから

$$\int_Z \bar{\varphi}(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

K はコンパクトであるから $\varphi^*_K \geqq \bar{\varphi}_K$ $[\nu]$ したがって

$$\int_Z \varphi^*(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

したがって

$$\int_Z \varphi^*(A|z)\,dP_\omega(z) \geqq 1-\varepsilon$$

εは任意だから

$$\int_Z \varphi^*(A|z)\,dP_\omega(z) \geqq 1$$

一方 Aは閉集合だから $\varphi^*(A|z) = \sup_{R\in\mathcal{R}} \bar{\varphi}(R|z)$
$\leqq 1$. 故に

$$\varphi^*(A|z) = 1 \quad [P_\omega]$$

νは$\{P_\omega : \omega\in\Omega\}$と equivalent であるから

$$\varphi^*(A|z) = 1 \quad [\nu]$$

C) B)でφ^*が決定関数であることがわかった. 次にφ^*がφと modified minimax sense において$\underbrace{\varphi\text{と同程度}}_{\text{少なくとも}}$によいことを証明しよう.

$$\rho(\omega,\varphi^*) = \int_0^\infty\int_Z \varphi^*(\{a : L(\omega,a) > h\}|z)\,p(z|\omega)\,d\nu(z)\,dh$$

$$= \int_0^\infty\int_Z [1-\varphi^*(\{a : L(\omega,a) \leqq h\}|z)]\,p(z|\omega)\,d\nu(z)\,dh$$

$$= \lim_{H\to\infty}\int_0^H\int_Z [1-\varphi^*(\{a : L(\omega,a) \leqq h\}|z)]\,p(z|\omega)\,d\nu(z)\,d$$

$$= \lim_{H\to\infty}\left(H - \int_0^H \int_Z \varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z) p(z \mid \omega) d\nu(z) dh\right)$$

$$= \lim_{H\to\infty}\left(H - \int_0^H \lim_\alpha \int_Z \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z) p(z \mid \omega) d\nu(z) dh\right)$$

$$\leqq \lim_{H\to\infty} \lim_{\alpha} \left(H - \int_0^H \int_Z \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z) p(z \mid \omega) d\nu(z) dh\right)$$

$$= \lim_{H\to\infty} \lim_{\alpha} \int_0^H \int_Z [1 - \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z)] p(z \mid \omega) d\nu(z) dh$$

$$\leqq \lim_{\alpha} \int_0^\infty \int_Z \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) > h\} \mid z) p(z \mid \omega) d\nu(z) dh$$

$$= \lim_{\alpha} \rho(\omega, \varphi_\alpha) \quad \leqq \quad \sup_{\omega' \in \Omega_0} \rho(\omega', \varphi)$$

Ω_0 は ω のぞくする orbit である.

したがって φ^* は modified minimax sense において

φ と少なくても同程度によいことがわかった.

あとは φ^* がほとんど不変であることを証明することだけである.

そのために次の Lemma を証明する.

Lemma　g を fix するとすべての g' の有界可測関数中に

対して

$$\lim_{\alpha} \int_{g' \in G} \psi(g')\,[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] = 0$$

証明　$|\psi| \leqq 1$として証明してさしつかえない。Mを正整数とし$[-1, 1]$を長さ$\frac{1}{M}$の小区間に分割する。
積分の定義から

$$\Bigg| \int_{g' \in G} \psi(g')\,[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')]$$

$$- \sum_{k=-M}^{M} \frac{k}{M} \Big[\mu_\alpha\Big\{\Big(g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\Big) g^{-1}\Big\}$$

$$- \mu_\alpha\Big\{g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\Big\}\Big] \Bigg|$$

$$\leqq \Bigg| \int_{g' \in G} \psi(g')\,d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - \sum_{k=-M}^{M} \frac{k}{M} \Big[\mu_\alpha\Big\{\Big(g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\Big) g^{-1}\Big\}\Big] \Bigg|$$

$$+ \Bigg| \int_{g' \in G} \psi(g')\,d\mu_\alpha(g') - \sum_{k=-M}^{M} \frac{k}{M} \mu_\alpha\Big\{g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\Big\} \Bigg|$$

$$\leqq \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.$$

$$\left[\mu_\alpha\{(g' : \tfrac{k}{M} \leqq \psi(g') < \tfrac{k+1}{M})g^{-1}\} - \mu_\alpha\{g' : \tfrac{k}{M} \leqq \psi(g') < \tfrac{k+1}{M}\}\right]$$

は $\{\mu_\alpha\}$ が漸近的右不変だから $\underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$ である.

したがって

$$\limsup_\alpha \left| \int_{g' \in G} \psi(g')[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] \right| \leqq \frac{2}{M}$$

M は任意の正整数だから

$$\lim_\alpha \left| \int_{g' \in G} \psi(g')[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] \right| = 0$$

これで Lemma の証明は終った.

まずコンパクトな K に対して

$$\bar{\varphi}(g_A K \mid g_Z(z)) = \bar{\varphi}(K \mid z) \quad [\nu]$$

がなりたつことを証明しよう. そのためにはすべての $f \in L^1(\nu)$ に対して

$$\int_Z [\bar{\varphi}(g_A K \mid g_Z(z)) - \bar{\varphi}(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい. $\bar{\varphi}$ は φ_α の極限点であるから

$$\lim_\alpha \int_Z [\varphi_\alpha(g_A K \mid g_Z(z)) - \varphi_\alpha(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい　　　μ_αの定義から

$$\lim_\alpha \left[\int_Z \int_G \varphi(g_A' g_A K \mid g_z' g_z(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z)\, d\nu(z) \right.$$

$$\left. - \int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z)\, d\nu(z) \right]$$

$$= \lim_\alpha \left[\int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g' g^{-1}) f(z)\, d\nu(z) \right.$$

$$\left. - \int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z)\, d\nu(z) \right]$$

$$= \lim_\alpha \int_G \int_Z \varphi(g_A' K \mid g_z'(z)) f(z)\, d\nu(z) [d\mu_\alpha(g' g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')]$$

$\psi(g') = \int_Z \varphi(g' K \mid g_z'(z)) f(z)\, d\nu(z)$ は g' の可測関数

であり $|\psi(g')| \leq \int_Z |f(z)|\, d\nu(z) < \infty$ だから Lemma

を用いて

$$\lim_\alpha \int_G \int_Z \varphi(g_A' K \mid g_z'(z)) f(z)\, d\nu(z) [d\mu_\alpha(g' g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] = 0$$

故に

$$\lim_{\alpha} \int_{Z} [\varphi_{\alpha}(g_A K \mid g_z(z)) - \varphi_{\alpha}(K/z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\int_{Z} [\overline{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) - \overline{\varphi}(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\overline{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) = \overline{\varphi}(K \mid z) \quad [\nu]$$

この結果によって

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) = \varphi^*(K \mid z) \quad [\nu]$$

を証明する. U を開集合, L をコンパクト集合, $K \subset U \subset L$ とする. $\varphi^*_U = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathfrak{R}}} \overline{\varphi}_R \leqq \overline{\varphi}_L \ [\nu]$ だから $\varphi^*_K \leqq \varphi^*_U \leqq \overline{\varphi}_L \leqq \varphi^*_L \ [\nu]$.

また

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \leqq \overline{\varphi}(g_A L \mid g_z(z)) = \overline{\varphi}(L/z)$$
$$\leqq \varphi^*(L \mid z) \quad [\nu]$$

同様に

$$\varphi^*(K \mid z) \leqq \overline{\varphi}(L/z) = \overline{\varphi}(g_A L \mid g_z(z))$$
$$\leqq \varphi^*(g_A L \mid g_z(z)) \quad [\nu]$$

$\{L_n\}$ を $K = \cap L_n \downarrow$ かつ $K \subset U_n \subset L_n$ なる開集合 U_n が存在するようなコンパクト集合列とすると上の二つの不

等式から

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \leqq \varphi^*(K \mid z) \leqq \varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \quad [\nu]$$

したがって

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) = \varphi^*(K \mid z) \quad [\nu]$$

すべての $g \in \mathcal{G}$ に対して $\varphi^*(g_A S \mid g_z(z)) = \varphi^*(S \mid z) \; [\nu]$ となる S 全体を $\mathfrak{A}^*$ とすると $\mathfrak{A}^*$ は単調クラスとなる。すなわち $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$, $S_n \in \mathfrak{A}^*$ なら $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{A}^*$ となる。$\mathfrak{A}$ は K をふくむ最小の単調クラス $\mathfrak{M}(K)$ であり $K \subset \mathfrak{A}^*$ であるから $\mathfrak{M}(K) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$、これと $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(K)$ より $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. 故に任意の $S \in \mathfrak{A}$ に対して $\varphi^*(g_A S \mid g_z(z)) = \varphi^*(S \mid z) \; [\nu]$ となる。

この等式の除外集合が S に無関係にとれることの証明は省略する。