数理解析研究所講究録
46巻 1968年 29-46

Adequacy and Sufficiency

大阪市大 理学部 杉浦 誠

§1. 序

この小論はBahadur [1] の Sufficiency − Transitivity, Hall − Wijsman − Ghosh [2]の Conditional independence, そして Skibinsky [3]の Adequacyの相互関係をはっきりさせることを目的としている。従って十分統計量の性質などには触れていない。

§2では記号の説明及び諸定義, §3では[1], [2], [3]の関係を示し最後にある条件のもとで, Adequacy に関する因子分解定理を証明した。§4では Adequacy の予測問題への応用を竹内啓[4] に従って示し, Adequate 統計量の例をいくつか示した。

§2. 諸定義, 記号

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$を標本空間, $\mathcal{P} = \{P\}$を$\mathcal{A}$上の確率測度の集合とする。$\mathcal{B}$を$\mathcal{X}$の部分集合のつくるσ-fieldとして, $\mathcal{B}$の

元がすべて$\mathcal{A}$の元であるならば，$\mathcal{B}$は$\mathcal{A}$のsub-fieldといい$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$とかく。$x\in\mathcal{X}$に対して$\Pi(x)$を$x$を含むある命題とする。ある$\mathcal{A}$-$\mathcal{P}$-零集合$N$があって$\Pi(x)$は$x\in\mathcal{X}-N$で真であるとき，$\Pi(x)\,[\mathcal{A},\mathcal{P}]$とかく。

$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{A}$とする。そこでどんな$B_1\in\mathcal{B}_1$に対しても$B_2\in\mathcal{B}_2$が存在して$(B_1-B_2)\cup(B_2-B_1)$が$\mathcal{A}$-$\mathcal{P}$-零集合であるならば$\mathcal{B}_1\leq\mathcal{B}_2\,[\mathcal{A},\mathcal{P}]$とかく。またこの逆が成り立てば$\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2\,[\mathcal{A},\mathcal{P}]$と定義する。

$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$であって，$P$を$\mathcal{A}$上の確率測度，$f(x)$を$\mathcal{A}$-$P$-可積分とする。Radon-Nikodym theoremからどんな$B\in\mathcal{B}$に対しても，$\int_B g(x)\,dp=\int_B f(x)\,dp$を満足する$g(x)$（$\mathcal{B}$-$P$-可積分）が存在する。（この$g(x)$は$\mathcal{B}$-$P$-零集合を除いて一意である。）上で存在した$g(x)$を$E_p[f(x)|\mathcal{B}]$とかき，$\mathcal{B}$が与えられたときの$P$に関する$f(x)$の条件付期待値という。なお$f(x)=\chi_A(x)$（$A\in\mathcal{A}$）のときは，$E_p[\chi_A(x)|\mathcal{B}]$（$=P(A|\mathcal{B})$）を$A$の条件付確率という。

§3. Adequacy, Sufficiency, Transitivity & Conditional independence.

$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0\subseteq\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$を$\mathcal{A}$上の確率測度の集合とする。

<u>定義1. [3].</u> ① どんな$B\in\mathcal{B}$に対しても，$\mathcal{B}_0$-可測$\varphi_B(x)$が

存在して，どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても，$\varphi_B(x) = E_P[\chi_A(x) \mid \mathcal{B}_0]$ $[\mathcal{A}, P]$

②どんな $C \in \mathcal{C}$，$P \in \mathcal{P}$ に対しても　$E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}] = E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_0]$ $[\mathcal{A}, P]$

上の①，②が成り立つとき，$\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$ に関して adequate であるといい $\mathcal{B}_0 \, \mathrm{adq}[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ とかく。

また $\mathcal{A}_0 = \{\phi, \mathcal{X}\}$ とすれば，$\mathcal{B}_0 \, \mathrm{adq}[\mathcal{B} : \mathcal{A}_0, \mathcal{P}]$ は $\mathcal{B}_0$ が $\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{B}$ の十分 sub-field であることの定義と一致する。（これを $\mathcal{B}_0 \, \mathrm{suf}[\mathcal{B} : \mathcal{P}]$ とかくことにする。）

<u>定義 2. [1]</u>. $\mathcal{B}_m^0 \subseteq \mathcal{B}_m$，$\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}_{m+1}$，$\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{A}$，$m = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ とする。① $\mathcal{B}_m^0 \, \mathrm{suf}[\mathcal{B}_m : \mathcal{P}]$，$m = 1, 2, \cdots\cdots$，② どんな $C \in \mathcal{B}_{m+1}^0$ $P \in \mathcal{P}$ に対しても，$E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_m] = E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_m^0]$ $[\mathcal{A}, P]$ $m = 1, 2, \cdots$

上の①，②が成り立つとき，$\{\mathcal{B}_m^0\}$ は $\{\mathcal{B}_m\}$ の十分，transitive な列という。（注意．②の条件を transitive という。）

なお定義 2 を定義 1 を使って云えば，$\mathcal{B}_m^0 \, \mathrm{adq}[\mathcal{B}_m : \mathcal{B}_{m+1}^0, \mathcal{P}]$，$m = 1, 2, \cdots\cdots$　である。

<u>定義 3. [2]</u> $\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{A}$ とする。どんな $B_1 \in \mathcal{B}_1$，$B_2 \in \mathcal{B}_2$，$P \in \mathcal{P}$ に対しても，$E_P[\chi_{B_1}(x) \cdot \chi_{B_2}(x) \mid \mathcal{B}_3] = E_P[\chi_{B_1}(x) \mid \mathcal{B}_3] \cdot E_P[\chi_{B_2}(x) \mid \mathcal{B}_3]$，$[\mathcal{A}, P]$ が成り立つならば，$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$ は $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立であるという。

<u>定理 1. [2]</u>. 定義 1 の条件②の必要十分条件は $\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ が $\mathcal{B}_0$

に関して条件付独立であることである。

(証明),(必要性). $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\int_{B_0} E_p[\chi_B \cdot \chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp = \int_{B_0} \chi_B \cdot \chi_C\,dp = \int_{B_0 \cap B} \chi_C\,dp = \int_{B_0 \cap B} E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}]\,dP$$

$$= \int_{B_0} \chi_B\, E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp = \int_{B_0} E_p[\chi_B \mid \mathfrak{B}_0] \cdot E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp, \ \forall B_0 \in$$

(十分性). $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\int_B E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}]\,dp = \int \chi_B \cdot \chi_C\,dp = \int E_p[\chi_B \cdot \chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp$$

$$= \int E_p[\chi_B \mid \mathfrak{B}_0] \cdot E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp = \int_B E_p[\chi_C \mid \mathfrak{B}_0]\,dp \quad ■$$

次に $P \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{C}$, $(P(C) > 0)$, なる (P, C) に対して, $P^C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)}$ $(A \in \mathfrak{A})$ で P^C を定義すれば P^C は $\mathfrak{A}$ 上の確率測度になる。そこで $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{ P^C ; P \in \mathcal{P}, C \in \mathcal{C}, P(C) > 0 \}$ とおくならば次の定理が成り立つ。

<u>定理2.[3].</u> 次の i)〜iv) は同値である。

i) $\mathfrak{B}_0$ suf $[\mathfrak{B} : \mathcal{P}(\mathcal{C})]$

ii) どんな $B \in \mathfrak{B}$ に対しても, $\mathfrak{B}_0$−可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$E_p[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B \mid \mathcal{C}] = E_p[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}]$, $[\mathcal{C}, P]$, $\forall B_0 \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathcal{P}$

iii) どんな $B \in \mathfrak{B}$ に対しても, $\mathfrak{B}_0$−可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$\varphi_B(x) = E_p[\chi_B \mid \mathfrak{B}_0 \vee \mathcal{C}]$, $[\mathfrak{A}, P]$, $\forall P \in \mathcal{P}$

iv) $\mathfrak{B}_0$ adq $[\mathfrak{B} : \mathcal{C}\mathcal{P}]$

(証明), i)⇒ii) i より どんな $B \in \mathfrak{B}$ に対しても,

$\mathcal{B}_0$－可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，

$P^G(B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B \, dP^G \quad \forall B_0 \in \mathcal{B}_0,\ P \in \mathcal{P},\ G \in \mathcal{C}$ である。

従って，$\int_G E_P[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}] dp = \int_G \chi_{B_0 \cap B} dp = \int_G E_P[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B \mid \mathcal{C}] dp$

ii) ⇒ iii)　ii) より $B \in \mathcal{B},\ B_0 \in \mathcal{B}_0,\ G \in \mathcal{C},\ P \in \mathcal{P}$ に対して

$\int_G E_P[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}] dp = \int_G E_P[\varphi_B \cdot \chi_{B_0} \mid \mathcal{C}] dp$ である ―①

①の左辺 $= \int_{B_0 \cap G} \chi_B \, dp = \int_{B_0 \cap G} E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] dp$

①の右辺 $= \int_C \varphi_B \chi_{B_0} dp = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B \, dp$

従って　$\varphi_B(x) = E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}],\ [\Omega, P]$

iii) ⇒ iv)　iii) よりどんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても $\mathcal{B}_0$－可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても

$\varphi_B(x) = E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] = E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0],\ [\Omega, P]$ であるから

$\mathcal{B}_0\, \mathrm{adq}[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ の定義の①が云えた。

次に $B_0 \in \mathcal{B}_0,\ B \in \mathcal{B},\ G \in \mathcal{C},\ P \in \mathcal{P}$ に対して

$P(B_0 \cap B \cap G) = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B \, dp = \int_{B_0 \cap C} E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0] dp = \int_{B_0 \cap B} E_P[\chi_G \mid \mathcal{B}_0] dp$

従って，$B_0 = \mathcal{X}$ とおくならば $\int_B E_P[\chi_G \mid \mathcal{B}_0] dp = \int_B E_P[\chi_G \mid \mathcal{B}] dp$

故に $\mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}]$ の定義の② がいえた。

iv) ⇒ i) $B_0\in\mathcal{B}_0,\ B\in\mathcal{B},\ C\in\mathcal{C},\ P\in\mathcal{P}$ に対して

$$P(B_0\cap B\cap C)=\int_{B_0\cap B}E_P[\chi_C|\mathcal{B}]dp=\int_{B_0\cap B}E_P[\chi_C|\mathcal{B}_0]dp$$

$$=\int_{B_0\cap C}E_P[\chi_B|\mathcal{B}_0]dp=\int_{B_0\cap C}\varphi_B\,dp,\quad \left(\text{iii) の } \mathcal{B}_0\text{adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}] \text{ の定義 ① から}\right)$$

従って $P(C)>0$ に対して

$$\frac{P(B_0\cap B\cap C)}{P(C)}=\int_{B_0}\varphi_B\cdot\frac{\chi_C}{P(C)}dp\qquad\therefore P^C(B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B\,dp^C$$ ┘

<u>系2.1</u> $\mathcal{B}\perp\!\!\!\perp\mathcal{C}$ とするならば, $\mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}]$ と $\mathcal{B}_0$ suf $[\mathcal{B}:\mathcal{P}]$ とは必要十分である。

(証明) $\mathcal{B}$ 上では $\mathcal{P}(\mathcal{C})=\mathcal{P}$ である。従って定理の i) ⇔ iv) より結論を得る。

<u>定義4. [3]</u>. $P\in\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{X}\times\mathcal{B}$ 上の関数 $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ が次の ①, ② を満足するならば $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ に関する $\mathcal{B}$ の regular な条件付確率という

$$\begin{cases} ① & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\cdot, B)\ (\forall B\in\mathcal{B}) \text{ は } E_P[\chi_B|\mathcal{C}] \text{ の version} \\ ② & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x,\cdot)\ (\forall x\in\mathcal{X}) \text{ は } \mathcal{B} \text{ 上の確率測度} \end{cases}$$

今どんな $P\in\mathcal{P}$ に対しても, regular な条件付確率 $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ が存在すると仮定して, その全体を $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x,\cdot);\ P\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}\}$

とおく。そうすれば次の定理が成り立つ。

<u>定理3. [3]</u>　i) どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても regular な条件付確率が存在するとする。

$\mathcal{B}_0$ suf $[\mathcal{B} : \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}] \implies \mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$

ii) また $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ が可分ならば定義4の①, ②を満足する regular な条件付確率が存在して, i) の逆が成り立つ。

(証明)　i) $f(x)$ を $\mathcal{B}$-P-可積分とする。regular な条件付確率 $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ が存在するならば $E_P[f \mid \mathcal{C}] = \int_{\mathcal{X}} f \, dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ $[\mathcal{C}, P]$ である。いま $\mathcal{B}_0$ suf $[\mathcal{B} : \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}]$ から, どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても $\mathcal{B}_0$-可測 $\varphi_B(x)$ が存在して, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\cdot, B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B(x) \, dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, $(\forall B_0 \in \mathcal{B}_0, P \in \mathcal{P})$ —①

①の左辺 $= E_P[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}]$　$[\mathcal{C}, P]$

①の右辺 $= E_P[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B \mid \mathcal{C}]$　$[\mathcal{C}, P]$

であるから定理2の ii) が云えた。

ii) i) の逆を仮定することは定理2の ii) を仮定することである。$B_0 \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{C}$-P-零集合 $N_{B_0 B}(P)$ が存在して, どんな $x \in \mathcal{X} - N_{B_0 B}(P)$ に対しても

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x, B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B \, dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x, \cdot)$$　である。

$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ が可分であることより $\hat{\mathcal{B}}_0 = \{ B_{0i} : i = 1, 2, \cdots \}$ $\hat{\mathcal{B}} = \{ B_j : j = 1, 2, \cdots \}$ を $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ を生成する $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ の可付番

部分集合族とする。そこで $N(p)=\bigcup_{i,j} N_{B_{0i}B_j}(p)$ $(\forall p\in\mathcal{P})$ とおく。$N(p)$ は $\mathcal{C}$-P-零集合であって $x\in\mathcal{X}-N(p)$ に対して

$$P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x, B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B\, dP^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\quad(\forall B_0\in\hat{\mathcal{B}}_0,\ B\in\hat{\mathcal{B}})\ \text{—②}$$ である。

従って②はどんな $B_0\in\mathcal{B}_0$, $B\in\mathcal{B}$ に対しても成り立つ。このことは $\mathcal{B}_0$ が $\{P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\ ;\ p\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}-N(p)\}$ に対して十分であることを意味している。

今 $Q=\{Q_{p,x}\ ;\ p\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}\}$

但し

$$Q_{p,x}=P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\quad ;\ x\in\mathcal{X}-N(p)$$

$$=P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\zeta_p,\cdot)\quad ;\ x\in N(p)\quad(\zeta_p \text{ は } \mathcal{X}-N(p) \text{ の任意の点})$$

とすれば $Q_{p,x}$ は定義4の①，②を満足し $\mathcal{B}_0\ \mathrm{suf}[\mathcal{B}:Q]$ である。 ┛

<u>定義5.[3]</u> $\mathcal{B}^*\leq\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\leq\mathcal{A}$ とする。

① $\mathcal{B}^*\ \mathrm{adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$

② $\mathcal{B}_0\ \mathrm{adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ ならば $\mathcal{B}^*\subseteq\mathcal{B}_0\ [\mathcal{A},\mathcal{P}]$

上の①，②が成り立つとき $\mathcal{B}^*$ を $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$ に関して最小な adequate であるといい，$\mathcal{B}^*\ \mathrm{min\ adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ とかく。

今 $\mathcal{P}$ を dominated であるとすれば，$\mathcal{P}(\mathcal{C})$ も dominated であり定理2の i)⇔ii) と[3]の定理6.2から次の系を得る。

<u>系2.2</u> どんな $\mathcal{B}\leq\mathcal{A}$ に対しても，$\mathcal{B}_0\ \mathrm{min\ adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ で

ある$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$が存在する。

次に条件付独立性に関する定理，補題を[2]に従っていくつかあげる。

<u>定理4.</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立であるための必要十分条件は，どんな$B_2 \in \mathcal{B}_2$に対しても

$E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3]$ $[\Omega, p]$, $\forall p \in \mathcal{P}$ である。

（証明）（必要性） $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $p \in \mathcal{P}$に対して

$E_p[\chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3]$ $[\Omega, p]$ —① が成立つ。

また $E_p[\chi_{B_1} | \mathcal{B}_3] \cdot E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3]$ $[\Omega, p]$ —②

仮定より①，②の左辺が等しい。

$$\therefore \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3]\, dp = \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3]\, dp \qquad \forall B_3 \in \mathcal{B}_3$$

$$\therefore \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3]\, dp = \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3]\, dp$$

（十分性） 上の証明を逆にたどればよい。 ┘

<u>系4.1</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立であるための必要十分条件は$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立である。 ┘

<u>系4.2</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$であるための必要十分条件は，どんな$\mathcal{B}_2$-可測$f(x)$に対しても，$E_p[f | \mathcal{B}_1] = E_p[f]$ $[\Omega, p]$ $(\forall p \in \mathcal{P})$である。┘

<u>補題1.</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立で，$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$とするならば$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立である。 ┘

<u>系4.3</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ ならば $\mathcal{B}_0 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$ である。 ┘

<u>補題2.</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1$ ならば $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ は $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立である。 ┘

<u>定理5. [2].</u> $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\cdots$ を互に独立な Ω の sub-field とする。$\mathcal{B}_m = \mathcal{C}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{C}_m$ として、$\{\mathcal{B}_m^0\}$ を $\mathcal{B}_n^0 \subseteq \mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_{m+1}^0 \subseteq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}_{m+1}$ $m=1,2,\cdots$ なる列とする。すると $\{\mathcal{B}_m^0\}$ は $\{\mathcal{B}_m\}$ に対して transitive である。

（証明） $\{\mathcal{B}_m\}$ の作り方より $\mathcal{B}_m \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_{m+1}$ である。補題２より $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_{m+1}$ は $\mathcal{B}_m^0$ に関して条件付独立である。また系4.1より $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_{m+1} \vee \mathcal{B}_m^0$ は $\mathcal{B}_m^0$ に関して条件付独立である。また補題1より $\mathcal{B}_{m+1}^0$, $\mathcal{B}_m$ は $\mathcal{B}_m^0$ に関して条件付独立である。従って定理1より結論を得る。 ┘

<u>補題3.</u> $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \Omega$, $\mathcal{B}_1^0 \subseteq \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2^0 \subseteq \mathcal{B}_2$ として, $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$ とする。そこで $\mathcal{B}_1^0$ suf$[\mathcal{B}_1 : \mathcal{P}]$, $\mathcal{B}_2^0$ suf$[\mathcal{B}_2 : \mathcal{P}]$ であるならば $\mathcal{B}_1^0 \vee \mathcal{B}_2^0$ suf $[\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 ; \mathcal{P}]$ が成り立つ。 ┘

<u>定理6. [1].</u> $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\cdots\cdots$ を互に独立な Ω の sub-field とする。$\mathcal{B}_m = \mathcal{C}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{C}_m$ として, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{B}_m$ 上で dominated であるとする。($m=1,2,\cdots\cdots$) そうすれば $\{\mathcal{B}_m\}$ に対して necessary, sufficient, transitive なる列 $\{\mathcal{B}_m^0\}$ が存在する。

（証明） まず $\mathcal{P}$ が dominated であることにより定理6-2[1] から, $\mathcal{B}_m$ の necessary, sufficient, sub-field $\mathcal{B}_m^0$ が存在する。($m=1,2,\cdots$)

これが transitive であることを云えばよい。

いま, $\mathcal{B}_m^0$ suf $[\mathcal{B}_m : \mathcal{P}]$　$m=1, 2, \cdots$　である。

また　$\mathcal{C}_{m+1}$ suf $[\mathcal{C}_{m+1} : \mathcal{P}]$　$m=1, 2, \cdots$　は明らかである。

$\mathcal{B}_m \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_{m+1}$ であるから補題3より

$\mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}_{m+1}$ suf $[\mathcal{B}_m \vee \mathcal{C}_{m+1} : \mathcal{P}]$ が成り立つ。

一方　$\mathcal{B}_{m+1}^0$ min suf $[\mathcal{B}_{m+1} : \mathcal{P}]$　であるから

$\mathcal{B}_{m+1}^0 \leq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}$　$[\mathcal{Q}. \mathcal{P}]$　となる。

従って定理5の条件を満足することにより $\{\mathcal{B}_m^0\}$ は $\{\mathcal{B}_m\}$ の transitive な列である。(注意: 定理5の条件で $\mathcal{B}_{m+1}^0 \leq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}$ $[\mathcal{Q}. \mathcal{P}]$ であっても定理5は成り立つ。)

<u>定理7.</u> $\mathcal{Y}$ を点 y の集合, $\mathcal{Z}$ を点 z の集合, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ をおのおの $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ の部分集合のつくる σ-field とする。また $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ とし, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \times \mathcal{Z}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Y} \times \mathcal{C}'$, $\mathcal{B}_0' \leq \mathcal{B}'$ に対しては $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0' \times \mathcal{Z}$ とする。そこで $\mathcal{Q} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\ (= \mathcal{B}' \times \mathcal{C}')$ として $\mathcal{P}$ を $\mathcal{Q}$ 上の確率測度の集合で, 直積, 確率測度 $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2$ に関して $\mathcal{P} \ll \lambda$ であると仮定する。

そうすれば $\mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B} ; \mathcal{C}. \mathcal{P}]$ と, どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても, $\frac{dP}{d\lambda} = g(x)\, h_P(x)$ (但し $g(x)$ は非負, $\mathcal{B}$-λ-可積分, $h_P(x)$ も非負で $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$-可測) と分解されることとは必要十分である。

(証明) (必要性) $\mathcal{P}$ は dominated であるから, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_0$ なる $\mathcal{P}$ の可付番部分集合 $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2, \cdots\}$ が存在する。

$C_1, C_2, \cdots$ を $\sum C_i = 1$ なる正の定数として次の様に $\mathcal{B}'$ 上に確率測度 λ_{01} を定義する。$\mathcal{P} \ll \lambda$ であるから，$\frac{dP}{d\lambda} = k_p(x)$ $(\forall P \in \mathcal{P})$ とおくことにして，

$$d\lambda_{01}(y) = \sum C_i \int_{\mathfrak{Z}} k_{P_i}(y, z)\, d\lambda_2(z)\, d\lambda_1(y) \quad \begin{pmatrix} P_i \in \mathcal{P}_0 & i = 1, 2, \cdots \\ x = (y, z) & \end{pmatrix}$$

そして Ω 上の確率測度 λ_0 を $\lambda_{01} \times \lambda_2$ で定義する。このようにして定義された λ_0 に関して $\lambda_0 \ll \lambda$ である。従って $\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = g(x)$ $(\geqq 0)$ が Radon-Nikodym 定理から存在する。一方 $\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{d\lambda_{01}}{d\lambda_1} \times \frac{d\lambda_2}{d\lambda_2}$ から $g(x) = \frac{d\lambda_{01}(y)}{d\lambda_1(y)}$ となり z には無関係に決る。従って $g(x)$ は $\mathcal{B}$－λ－可積分である。

次に上で定義した λ_0 について $\mathcal{P} \ll \lambda_0$ である。このことからどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $\frac{dP}{d\lambda_0} = h_p(x)$ $(\geqq 0)$ が存在する。もしこれが $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$－可測であるならば，$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{d\lambda}$ から結論を得る。

そこでどんな $B \in \mathcal{B}$，$C \in \mathcal{C}$，$P \in \mathcal{P}$ に対しても

$$\int_{B \cap C} h_p(x)\, d\lambda_0 = P(B \cap C) = \int_C \chi_B(x)\, dp = \int_C E_p[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp \quad \text{―①}$$

しかるに仮定（$\mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$）から定理2の iii) を使えば $\mathcal{B}_0$－可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，$\varphi_B(x) = E_p[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, \mathcal{P}]$ である。

また $\varphi_B(x) = E_{\lambda_0}[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, \mathcal{P}]$ である。 ―②

このことからどんな $C \in \mathcal{C}$ に対しても

$$\int_{C} E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp = \int_{C} \varphi_B\, dp = \int_{C} \varphi_B \cdot h_p\, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} E_{\lambda_0}[\varphi_B \cdot h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} \varphi_B \cdot E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} E_{\lambda_0}[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] \cdot E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0 \quad (②より)$$

$$= \int_{C \cap B} E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0 \quad —③$$

①と③より $h_p(x) = E_{\lambda_0}[h_p(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, P]$ 故に $h_p(x)$ は $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ - 可測である。

（十分性） どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても、$\mathcal{B}_0$ - 可測 $\varphi_B(x)$ が存在して、どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $\varphi_B(x) = E_p[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, P]$ なることを示せば定理2のⅲ)より結論を得る。

それには測度 λ^* を次の様に定義する。$d\lambda^* = g(x)\, d\lambda$ $g(x)$ は $\mathcal{B}$ - λ - 可積分であることから λ^* も有限, 直積測度である。（$\lambda^* = \lambda_1^* \times \lambda_2^*$ とおく） そこでどんな $B \in \mathcal{B}$, $B_0 \in \mathcal{B}_0$ $C \in \mathcal{C}$, に対しても

$$\int_{B_0 \cap C} E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp = \int_{B_0 \cap C} \chi_B\, g(x)\, h_p(x)\, d\lambda$$

$$= \int_{B_0 \cap C} \chi_B \cdot h_p \cdot d\lambda^* = \int_{C'} \int_{B_0'} \chi_B(y, z)\, h_p(y, z)\, d\lambda_1^*(y)\, d\lambda_2^*(z) \quad \begin{pmatrix} B_0 = B_0' \times \mathcal{Z} \\ C = \mathcal{Y} \times C' \end{pmatrix}$$

$$= \int_{C'} \int_{\mathcal{B}_0'} E_{\lambda_1^*}[\chi_B(y,z) \mid \mathcal{B}_0'] \, h_p(y,z) \, d\lambda_1^*(y) \, d\lambda_2^*(z)$$

$$= \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B \mid \mathcal{B}_0'] \, h_p \, d\lambda^* = \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B \mid \mathcal{B}_0'] \, dp$$

ここで $E_{\lambda_1^*}[\chi_B \mid \mathcal{B}_0']$ は $\mathcal{B}_0$－可測であるからこれを $\varphi_B(x)$ とおけば $\varphi_B(x) = E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, P]$ ┘

なお $\mathcal{P}$ が直積，確率測度によってdominatedでないならば，この定理が成り立たない例をあげる。

$\mathcal{Y} = [0,4]$，$\mathcal{Z} = [0,4]$ とし，$\mathcal{B}'$，$\mathcal{C}'$ をそれぞれ $\mathcal{Y}$，$\mathcal{Z}$ のBorel集合の全体とする。$\Omega = \mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$ で $\mathcal{P} = \{P_i : i = 1,2,3,4\}$ を次の様に定義する。l' を1次元Lebesgue測度，L を $y = z$ なる直線として $\lambda(A) = l'(A \cap L)$ $(A \in \Omega)$ で λ を定義する。そして $\frac{dP_i}{d\lambda} = \frac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0,i]}(y)$ で P_i を決める。$(i=1,\cdots 4)$

一方 $t(y) = [y] + 1$ とすれば $\frac{dP_i}{d\lambda} = \frac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0,i]}(t(y))$ となり t によってinduceされた σ-field は $\mathcal{B}'$ のsufficient sub-fieldであるが，定義1の②を満足しない。しかし P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ の定義からわかるようにRadon-Nikodym密度は分解されている。

§3. Adequacyの予測への応用

予測とは$\mathcal{X}$上の関数$Y=f(x)$の値を知って，別の関数$Z=g(x)$の値について何らかの判断を下すことである。そこで予測量Tは$Y=f(x)$の値域上で定義された関数である。

定義6. Y, Zを統計量とする。$T(y)$（Yの値域$\mathcal{Y}$上の関数）を統計量とする。T, Y, Zによってinduceされたσ-fieldを$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$とすれば，もし$\mathcal{B}_0 \, adq[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$が成り立つときTはYに対するZ, $\mathcal{P}$に関するadequate統計量という。（これを$T \, adq \, [Y : Z, \mathcal{P}]$とかく）

なおこのTをZの予測に関して十分であるともいう.[4]

簡単のためZの値域がR^1である場合を考える。どんな$P \in \mathcal{P}$に対しても，$\gamma(Y)$が$E_P[Z - \gamma(Y)] = 0$を満足するとき，$\gamma(Y)$を不偏予測量といい，$\gamma'(Y)$がどんな$P \in \mathcal{P}$に対しても$E_P[(Z - \gamma'(Y))^2]$を最小にするならばこの$\gamma'(Y)$を最小平均2乗誤差予測量という。

定理8.[4]（Rao-Blackwellの定理の拡張）

・$T \, adq \, [Y : Z . \mathcal{P}]$であるとする。$\gamma(y)$を$E_P[\gamma^2(Y)] < \infty$ ($\forall P \in \mathcal{P}$)なる予測量とする。そこで$\gamma^*(t) = E[\gamma(Y) | T]$（これはPに無関係に決まる）とすれば，どんな$P \in \mathcal{P}$に対しても$E_P[(Z - \gamma^*(T))^2] \leqq E_P[(Z - \gamma(Y))^2]$が成り立つ。（但し$E_P[Z^2] < \infty$ $\forall P \in \mathcal{P}$と仮定する）。特に$\gamma(y)$が不偏予測量であるならば

$\gamma^*(t)$も不偏予測量である。

（証明）　省略.

<u>定理9.</u> $E_p[Z|T]$ がpに無関係であるとする。またどんな$p\in\mathcal{P}$に対しても $E_p[Z|Y]=E_p[Z|T]$ であるとする。（但し $E_p[Y^2]<\infty \quad \forall p\in\mathcal{P}$ とする）

そこで $E[Z|T]$ はZの不偏最小平均2乗誤差予測量である。

（証明）　省略

（注意：この定理は古典的回帰関数の方法にすぎない。）

最後に adequate統計量の例をあげておく。

<u>例1</u>[4]. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ を独立，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする。Zもまた正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ で Y_iとZは独立でなく $Cov(Z,Y_i)=b_i$（既知）であるとする。μ，σ^2は未知で $\mathcal{P}=\{P_\theta,\ \theta=(\mu,\sigma^2),\ -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\}$

この場合 $T(y_1,\cdots,y_m)=(\Sigma b_i y_i,\ \Sigma y_i,\ \Sigma y_i^2)$ が adequate 統計量である。

<u>例2.</u> $Y_1,\cdots,Y_m, Y_{m+1},\cdots,Y_{m+n}$ は互に独立，二項分布 $(0<p<1)$ に従うものとする。$Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$ とし $Z=\sum_1^{m+n} Y_i$ とする。このYに対しては $T(y)=\sum_1^m y_i$ が adequate 統計量である。

例3. $Y_1, \cdots, Y_m$を互に独立で，$(0, \theta)$上の一様分布に従うものとする。Zを$(0, y_m)$上の一様分布に従うものとすればZの予測に対して，$T(y_1, \cdots, y_m) = (\max\{y_1, \cdots, y_{m-1}\}, y_m)$がadequate統計量である。

例4. Y_1は正規分布$N(\mu, 1^2)$　$(-\infty<\mu<\infty$　は未知$)$

Y_2は正規分布$N(y_1, 1^2)$

- - - - - - - - - - - - - - -

Y_mは正規分布$N(y_{m-1}, 1^2)$

Zは正規分布$N(y_m, 1^2)$　に従うものとする。

このZの予測に関しては，$T(y_1, \cdots, y_m) = (y_1, y_m)$がadequate統計量である。

例5. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, Z = Y_{m+1}$は二項変数とする。

$$Pr\{Y_1 = 1\} = r, \quad Pr\{Y_{i+1} = 1\} = \begin{cases} p & : Y_i = 1 \\ 1-p & : \text{その他} \end{cases}$$

$$Pr\{Y_{i+1} = 0\} = \begin{cases} q & : Y_i = 0 \\ 1-q & : \text{その他} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \cdots, m$とする.

$\theta = (r, p, q)$，$0 < r, p, q < 1$は未知であるとする。

一方$y_1, \cdots, y_m$に於て$1, 1$と続いた回数をs，$0, 0$と続いた回数をtとすれば，このZの予測に関して

$T(y_1, \cdots, y_m) = (y_1, t, s, n, y_m)$がadequate統計量で

ある。(但し $n=\sum_{1}^{m} y_i$)

References

[1] Bahadur. R. R (1954). Sufficiency and Statistical decision functions. Ann Math Stat. 25 423-462

[2] Hall. W. J, Wijsman. R. A and Ghosh. J. K (1965) The relationship between sufficiency and invariance with applications in sequential analysis. Ann. Math Stat 36. 575-614

[3] Skibinsky. M (1967). Adeqaate subfield and sufficiency Ann. Math Stat 38. 155-161

[4] 竹内 啓 (1966). 統計的予測の形式と方法について. 経済学論集才32巻 才3号、23-31