数理解析研究所講究録
46巻 1968年 15-25

次元最小の十分統計量の構成

統数研　清水良一

E.W. Baranking, "Sufficient statistics in the case of non-constant carrier," Sankhyā, ser. A., vol. 28., 1966, pp 101 − 122 を紹介する.

E^n の開集合 Ω の上の確率密度の族,

$$\mathcal{P} = \{ p(x, \theta) \mid \theta \in \Theta \}$$

が与えられているとする. 母数空間 Θ も E^ν の開集合で, すべての $\theta \in \Theta$ について,

$$\Omega = \Omega_\theta = \{ x \mid p(x, \theta) > 0 \}$$

であること, すなわち, $x \in \Omega$, $\theta \in \Theta$ のとき, $p(x, \theta) > 0$ であることを仮定する. さらに, $p(x, \theta)$ が x および θ についてなめらかであるとして, $\mathcal{P}$ にたいする十分統計量 $T(x) = (T_1(x), \cdots, T_r(x))$ で, $T_i(x)$ がなめらかな実数値関数であるもののうち, r が最小のものを構成するという問題は, 前論文, E.W. Barankin and M. Katz, Jr., "Sufficient statistics of minimal dimension," Sankhyā, vol. 21, 1959, pp 217−246,

で解決された。　この場合は，$\log p(x,\theta)$ が定義され，$\operatorname{grad}_\theta \log p(x,\theta)$ が最小十分統計量になるので，問題は $\operatorname{grad}_\theta \log p(x,\theta)$，$\theta \in \Theta$ で張られる linear space の基を求めることに帰着した。

この論文では，$\Omega_\theta = \{x \mid p(x,\theta) > 0\}$ が θ に依存しうる場合に同じ問題を扱う。　以下，つぎの仮定を設ける。

(I)　$\Gamma = \bigcup_{\theta \in \Theta} (\Omega_\theta \times \{\theta\})$ が $E^{n+\nu}$ の開集合である。

(II)　$p(x,\theta)$ が Γ で連続である。

(III)　Γ の境界のルベッグ測度は 0.

(IV)　Γ の境界の θ-section はルベッグ測度 0.

(V)　$x \in \Omega$ にたいして，有限の値 $b(x)$ があって，すべての $\theta \in \Theta$ について，　$p(x,\theta) \leqq b(x)$.

さて，$m = 1, 2, \cdots$ にたいして，$\varphi_m(\theta,\tau)$ は $\Theta \times \Theta$ で定義され，正の値をとる可測関数で，$\theta \in \Theta$ にたいして，$\varphi_m(\theta,\cdot)$ が Θ 上の確率密度であるとする。

(1)　$$p_m(x,\theta) = \int_\Theta p(x,\tau)\varphi_m(\theta,\tau)\,d\tau$$

とおくと，$\theta \in \Theta$ にたいして，$p_m(\cdot, \theta)$ が Ω 上の確率密度であり，しかも，すべての $x \in \Omega$，$\theta \in \Theta$ にたいして，$p_m(x, \theta) > 0$ である．　したがって，$p(\cdot, \theta)$ がなめらかならば，（θ についての微分可能性を仮定しなくても），$\varphi_m(\theta, \tau)$ に適当な条件を課すことによって，$p_m(x, \theta)$ がなめらかとなり，族 $\mathcal{P}_m = \{p_m(x, \theta) \mid \theta \in \Theta\}$ に前論文の結果を適用することができる．　ここでは，系列 $\varphi_m(\cdot, \cdot)$ として，つぎのようなものを考える．

E^ν において，θ を中心とする半径 α の球の内部を $S_{\theta,\alpha}$ とする．　このとき，任意の $\alpha > 0$ にたいして，

$$(2) \qquad \lim_{m\to\infty} \int_{\Theta - S_{\theta,\alpha}} \varphi_m(\theta, \tau)\, d\tau = 0 \qquad \theta \in \Theta$$

これは，確率密度 $\varphi_m(\theta, \cdot)$ をもつ分布の列が，θ に確率 1 を与える分布に収束することを意味する．

この条件のもとで，

$$(3) \qquad \lim_{m\to\infty} p_m(x, \theta) = p(x, \theta) \qquad x \in \Omega,\ \theta \in \Theta$$

が成り立つ．　実際，

$$|p_m(x,\theta)-p(x,\theta)| \leqq \int_{\Theta} \varphi_m(\theta,\tau)|p(x,\tau)-p(x,\theta)|d\tau$$

であるが，$p(x,\cdot)$ の連続性から，任意の $\varepsilon>0$ にたいして，$\alpha>0$ を十分小さくとるとき，$\tau\in S_{\theta,\alpha}$ なら，$|p(x,\tau)-p(x,\theta)| \leqq \varepsilon$ となるから，積分領域を $\Theta-S_{\theta,\alpha}$ と，$S_{\theta,\alpha}$ とに分け，さらに (V) を考慮すると，

$$|p_m(x,\theta)-p(x,\theta)| \leqq 2b(x)\int_{\Theta-S_{\theta,\alpha}} \varphi_m(\theta,\tau)d\tau+\varepsilon.$$

よって (2) から $\overline{\lim_{m\to\infty}}|p_m(x,\theta)-p(x,\theta)| \leqq \varepsilon$. ε が任意だから (3) が導かれる．

定理 1. $\varphi_m(\theta,\tau)$ が上記の条件を満たすとする．統計量 $T(x)$ が $\mathcal{P}$ にたいして十分であるための必要十分条件は，$T(x)$ が $\mathcal{P}_m$, $m=1,2,\cdots$ にたいして十分なことである．

証明. $T(x)$ が $\mathcal{P}$ にたいして十分であるとする．分解定理によって，

$$p(x,\theta)=f(T(x),\theta)\cdot g(x)$$

と書けるが，この関係は $x\in\Omega-M$ の各々について，ほとんどすべての $\theta\in\Theta$ にたいして成り立つこと

が示される．（こゝおよび以下において，Mは，ルベーグ測度0の，Ωの適当な部分集合を表わす．）

よって，

$$p_m(x,\theta) = \int_{\Theta} f(T(x),\theta)\, g(x) \cdot \varphi_m(\theta,\tau)\, d\tau.$$

$$= f_m(T(x),\theta) \cdot g(x). \qquad \text{a.e.}\ \theta \ \text{for each}\ x \in \Omega - M.$$

たゞし，$\quad f_m(y,\theta) = \int_{\Theta} f(y,\theta)\, \varphi_m(\theta,\tau)\, d\tau.$

逆に $T(x)$ が $\mathcal{P}_m$, $m = 1, 2, \cdots$ にたいして十分であるとする．分解定理によって，

(4) $\qquad p_m^{\circ}(x,\theta) = f_m^{\circ}(T(x),\theta)\ g_m^{\circ}(x).$

とかける．

$$\Omega = \bigcup_{\theta \in \Theta} \Omega_\theta$$

であるが，Ω_θ がすべて開集合だから，$\theta^{(k)} \in \Theta$, $k = 1, 2, \cdots$ が存在して，

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{\theta^{(k)}}$$

と書ける．

$$a_n > 0, \qquad \sum_n a_n = 1.$$

として，

(5) $$g_m(x) = \sum_k a_k\, p_m(x, \theta^{(k)}), \qquad x \in \Omega$$

とおくと,

$$g_m(x) > 0, \qquad m = 1, 2, \cdots, \qquad x \in \Omega$$

であり, また,

$$\int_\Omega g_m(x)\,dx = \sum a_k \int_\Omega p_m(x, \theta^{(k)})\,dx = 1,$$

から, $g_m(x) < \infty$ である. (4) を (5) に代入して,

(6) $$g_m(x) = g_m^\circ(x) \cdot \sum_k a_k \cdot f_m^\circ(T(x), \theta^{(k)}).$$

となるから,

$$f_m(y, \theta) = f_m^\circ(y, \theta) \Big/ \sum_k a_k f_m^\circ(y, \theta^{(k)})$$

とおくと, (4) は,

(7) $$p_m(x, \theta) = f_m(T(x), \theta) \cdot g_m(x)$$

と書ける. 定理の仮定から,

(8) $$\lim_{m\to\infty} p_m(x, \theta) = p(x, \theta), \qquad x \in \Omega,\ \theta \in \Theta$$

となるから, (5) と bounded convergence theorem から

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \lim_m \sum_k a_k\, p_m(x, \theta^{(k)}) = \sum_k a_k\, p(x, \theta^{(k)})$$

$$\equiv g(x) > 0, \qquad x \in \Omega$$

が存在する．　よって，$x \in \Omega - M$ のとき，a.e. θ について，

$$p(x,\theta)/g(x) = \lim_{m\to\infty} p_m(x,\theta)/g_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(T(x),\theta)$$

が $T(x)$ と θ の関数 $f(T(x),\theta)$ に等しい．

$$p(x,\theta) = f(T(x),\theta)\cdot g(x)$$

この関係が，実は，すべての $\theta \in \Theta$ について，a.e. x で成り立つことが示され，$T(x)$ が $\mathcal{P}$ にたいして十分であることが分る．　q.e.d.

例．　$\Theta = (0,\infty)$，$x = (x_1,\cdots,x_n)$

$$p(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n & \text{if } 0 < x_i < \theta,\ i=1,\cdots,n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．　$\Omega = [(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty)] - E$　としてよい．　ただし，$E = \bigcup_{i\neq j}\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i = x_j\}$ とする．
$\Omega_\theta = [(0,\theta)\times\cdots\times(0,\theta)] - E$　である．

ここでは，仮定（I）—（IV）が満たされることは明らか。　（V）は，$\theta \leqq \max x_i$ なら $p(x,\theta)=0$，$\theta > \max x_i$ なら $p(x,\theta) = 1/\theta^n$ であるから，$\theta \in \Theta$，$x \in \Omega$ にたいして，

$$p(x,\theta) \leqq (\max x_i)^{-n}$$

である．　いまの場合，

$$p_m(x,\theta) = \int_{\min x_i}^{\infty} \frac{1}{\tau^n} \varphi_m(\theta,\tau)\,d\tau$$

となるが，これが θ についてなめらかになるように φ_m を選べば，前論文の結果が適用される．それによれば，Ω の点はすべて regular となり，各点での十分統計量の最小次元は 1 であることが分る．さらに分解定理から，$T(x) = \max x_i$ が p_m，$m = 1, 2, \cdots$ の，したがって $\mathcal{P}$ の十分統計量であることが分る．

系列 $\varphi_m(\theta,\tau)$ の代りに，たゞ 1 つの $\varphi(\theta,\tau)$ を用いて議論することも可能である．$\varphi(\theta,\tau)$ は，$\varphi_m(\theta,\tau)$ と同様の性質をもつ他，"Θ_0 がルベッグ測度 0 の，Θ の部分集合のとき，

$$\{\varphi(\theta,\cdot) \mid \theta \in \Theta - \Theta_0\}$$

が $L_1(\Theta)$（$= \Theta$ 上の絶対可積分な実数値関数のつくる空間）で完備である．" という条件を満たすとする．

$$\mathcal{Q} = \{q(x,\theta) = \int_{\Theta} \varphi(\theta,\tau)p(x,\tau)\,d\tau \mid \theta \in \Theta\}$$

とおく．　$q(x,\theta) > 0$，　$x \in \Omega$，$\theta \in \Theta$ である

定理 2.　φ が上記の条件を満たすとする．統計量 $T(x)$ が $\mathcal{P}$ にたいして十分であるための必要十分条件は，$T(x)$ が Q にたいして十分なことである．

証明　必要であることの証明は定理 1 と同じである．十分であること：　$T(x)$ が Q にたいして，十分であるとする．分解定理から，

$$(9)\qquad q(x,\theta)=f(T(x),\theta)\,g(x),\qquad \text{a.e. }\theta \text{ for each } x\in\Omega-M$$

と書けるが，前と同様，$0<g(x)<\infty$ としてよい．
$q(x,\theta)$ の定義と (9) から

$$(10)\qquad \int_{\Theta}\varphi(\theta,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau=f(T(x),\theta)\,g(x).$$

$$\text{a.e. }\theta\quad \text{for each } x\in\Omega-M.$$

いま，$x,y\in\Omega-M$，$T(x)=T(y)$ とすると，
(10) から

$$\int_{\Theta}\varphi(\theta,\tau)\left[g(x)p(y,\tau)-g(y)p(x,\tau)\right]d\tau=0\qquad \text{a.e. }\theta$$

よって，

$$g(x)p(y,\theta)-g(y)p(x,\theta)=0.\qquad \text{a.e. }\theta$$

すなわち，

$$p(x,\theta)/g(x) = p(y,\theta)/g(y)$$

これは $p(x,\theta)/g(x)$ が $T(x)$ と θ との関数, $f(T(x),\theta)$ に等しいことを示す.

$$p(x,\theta) = f(T(x),\theta)\,g(x).$$

この関係が, 実はすべての $\theta\in\Theta$ について, a.e. x で成り立つことがいえて, $T(x)$ が $\mathcal{P}$ に対する十分統計量であることが分る.　　　q.e.d.

Remark.　$\varphi(\theta,\tau)$ が上記の条件すべての満足するための ひとつの十分条件は,

$$\varphi(\theta,\tau) = \prod_{i=1}^{\nu} h(\theta_i-\tau_i)$$

と書けることである. ただし, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_\nu)$, $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_\nu)$ で h は R 上の連続な確率密度で, いたるところ正, しかもその特性関数が 0 にならないものとする.

例　$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\Theta=R$,

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_i-\theta)^2} & x_i>0 \quad i=1,\cdots,n \\ \end{cases}$$

$$\quad 0 \qquad\qquad\qquad \text{その他}.$$

とする.

正規分布 $N(0,1)$ の特性関数 $e^{-t^2/2}$ が 0 にならないことから,

$$\varphi(\theta,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\theta-\tau)^2}$$

が条件を満たすことが分る.

$$q(x,\theta) = \frac{2^n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_i (x_i-\bar{x})^2 + \frac{n}{n+1}(\theta-\bar{x})^2\right]\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\min x_i - \frac{\theta+n\bar{x}}{n+1}} e^{-\frac{n+1}{2}y^2}\, dy.$$

に前論文の結果が使えて, $(\min x_i,\ \bar{x})$ が次元最小の十分統計量であることが分る.