

## 非可換エルゴード理論

京大 数研 荒木不二洋

無限系の統計力学の枠として  $C^*$ 環の理論が考えられ、最近この枠の中で非可換エルゴード理論と称するものが展開されている。その統計力学的背景については別の研究会で述べたので、ここでは作用素環的側面に限って、現在まで知られていることをまとめてみる。エルゴード状態の特徴づけと任意状態のエルゴード状態への分解が主な内容である。

## 目 次

## §1. 群上の平均

1.1	Godement 平均	1
1.2	平均エルゴード定理	3
1.3	柔順群と不変平均	4
1.4	Mフィルター	6

§2.  $C^*$ 環の自己同型による群の表現

2.1	基礎的定義	8
2.2	相互関係	10
2.3	性質	11
2.4	共変環	14

## §3. エルゴード状態と分解定理

3.1	エルゴード状態	14
3.2	分解定理	16
3.3	部分群に関する分解と弱 <i>mixing</i> 性	18
3.4	概同期状態	20

§4.	その他	21
-----	-----	----

## § 1. 群上の平均

### 1.1 Godement 平均

$G$ : 局所コンパクト群

$B(G)$ :  $G$  上有界複素数値関数の  $C^*$ 環,  $\|f\| = \sup |f(g)|$ .

$C(G)$ :  $G$  上連続有界複素数値関数の  $C^*$ 環,  $C(G) \subset B(G)$ .

$C_0(G)$ :  $f \in C(G)$ ,  $\lim_{g \rightarrow \infty} f(g) = 0$  のような  $f$  全体,

$\mathcal{P}(G)$ :  $G$  上連続正型複素数値関数. 正型とは

$$\sum C_i^* C_j f(g_i^{-1} g_j) \geq 0$$

$V(G)$ :  $\mathcal{P}(G)$  の元の線形結合全体.

$\overline{V}(G)$ :  $V(G)$  の  $B(G)$  における閉包,  $C^*$ 環.

$AP(G)$ :  $G$  上概周期関数の  $C^*$ 環. すなわち,  $f(g) = (\Psi_1, U(g)\Psi_2)$

( $U$  は  $G$  の有限次元表現,  $\Psi_1, \Psi_2$  は表現空間のベクトル) 全体のノルムによる閉包.

$R_s, L_s$ :  $R_s f(g) \equiv f(s^{-1}g)$ ,  $L_s f(g) \equiv f(g s)$ .

$Rf$ :  $R_s f$ ,  $s \in G$  の凸閉包.

$\overline{R}f$ :  $Rf$  の  $B(G)$  におけるノルムによる閉包.

$Lf, \overline{L}f$  も同様

$E$ :  $\overline{R}f, \overline{L}f$  がともに定数関数を含むような  $f$  全体,

$M(f)$ : Godement 平均,  $\overline{R}f \cup \overline{L}f$  に含まれる定数関数の値.

定理 1 (a)  $f \in E$  に対し  $M(f)$  は一意にきまり, 次の性

質をもつ,

$$(a1) \quad \mathcal{E} \text{ は } B(G) \text{ で 閉 じ っ て いて, } |M(f)| \leq \|f\|$$

$$(a2) \quad f \in \mathcal{E} \text{ なら, } f^*, \alpha f, R_g f, L_g f \in \mathcal{E} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, g \in G)$$

$$M(f)^* = M(f^*), M(\alpha f) = \alpha M(f), M(R_g f) = M(L_g f) = M(f).$$

$$(a3) \quad f \in \mathcal{E}, \quad f \geq 0 \text{ なら } M(f) \geq 0$$

$$(b) \quad \overline{V}(G) \subset \mathcal{E}, \quad M \text{ は } \overline{V}(G) \text{ の } R_g, L_g \text{ 不変状態.}$$

(c)  $f \in \overline{V}(G)$  に対し, 次の分解が一意的に存在する,

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in AP(G), \quad M(|f_2|^2) = 0$$

$f \in \overline{V}(G)$  に対し,  $G$  のユニタリ表現  $U_f$ , 表現空間のベクトル  $\Psi_1, \Psi_2$  が存在して

$$f_1(g) = (\Psi_1, U_f(g) E_f^F \Psi_2)$$

$$f_2(g) = (\Psi_1, U_f(g) (1 - E_f^F) \Psi_2)$$

ただし

$E_f^F$ : 表現  $U_f$  の有限次元不変部分空間への射影子を含む最小の射影子.

$f \in \mathcal{A}(G)$  の場合,  $f(g) = (\Psi_f, U_f(g) \Psi_f)$  となる巡回ベクトル  $\Psi_f$  をもつ表現  $U_f$  に対して, 次の条件は同等である.

(i)  $U_f$  が 0 以外  $G$  の有限次元表現を含まない.

$$(ii) \quad M(|f|^2) = 0$$

$$(iii) \quad M(|f|) = 0$$

(d) 次の性質をもつコンパクト群  $\overline{G}$  が存在する。

(d1)  $G$  から  $\overline{G}$  の中への準同型  $\pi$  が存在して  $\overline{\pi G} = \overline{G}$

(d2)  $f \in AP(G)$  に対し  $\pi^* f \in C(\overline{G})$  が存在して  $\pi^* f(\pi g) = f(g)$ ,

かつ  $\pi^*$  は  $AP(G)$  と  $C(\overline{G})$  の同型対応 (onto) を与える。

(d3)  $M(f) = \int_{\overline{G}} \pi^* f(\bar{g}) d m(\bar{g})$  ( $f \in AP(G)$ ), ここに  $m$  は  $\overline{G}$  の規格化された不変測度。

## 1.2 平均エルゴード定理

$U(g)$ :  $G$  のヒルベルト空間  $H$  上のユニタリ表現。

$E^F$ :  $H$  の有限次元不変部分空間をすべて含む最小の射影子。

$U^E$ :  $U$  の  $E^F H$  への制限。

$S_e$ :  $G$  の既約表現全体。

$U^\sigma(g)$ :  $\sigma \in S_e$  に対する表現演算子。

$H^\sigma$ :  $\sigma \in S_e$  の表現空間, 次元は  $d_\sigma$  とする。

$$U^E \text{ の既約分解 } \begin{cases} E^F H = \sum_{\sigma \in S_e}^{\oplus} H^\sigma \otimes H'^\sigma \\ U^E(g) = \sum_{\sigma \in S_e}^{\oplus} U^\sigma(g) \otimes 1'_\sigma \end{cases}$$

$E^\sigma$ :  $H$  における  $H^\sigma \otimes H'^\sigma$  への射影子。

定理2 (a)  $f \in \mathcal{V}(G)$  に対し, 次式をみたす  $H$  上有界作用素  $M(fU)$  が一意的に存在する。

$$( \Psi_1, M(fU) \Psi_2 ) = M \{ f(g) \cdot ( \Psi_1, U(g) \Psi_2 ) \} \quad \forall \Psi_1, \Psi_2 \in H$$

$$(b) \quad \| M(fU) \| \leq \| f \|$$

(c)  $f(g) = ( \Psi_1, U_f(g) \Psi_2 )$ ,  $U_f$  と  $U^E$  が部分表現を共有しなければ,  $M(fU) = 0$ 。

(d)  $M \{ ( \Psi_1^\sigma, U^\sigma(g) \Psi_2^\sigma )^* U(g) \} = d_\sigma^{-1} \{ P_{12} \otimes 1'_\sigma \} E^\sigma$   
 ただし,  $\Psi_1^\sigma, \Psi_2^\sigma \in H^\sigma$ ,  $P_{12} \Psi = ( \Psi_2^\sigma, \Psi ) \Psi_1^\sigma$  ( $\forall \Psi \in H^\sigma$ )。

$$M(U) = E^\sigma \text{ (不変ベクトル全体への射影)}.$$

### 1.3 乗順群と不変平均

定理3 次のいずれかの条件をみたす  $\mathcal{C}(G)$  の状態  $\eta$  の存在は, 与えられた  $G$  に対し同等である。

$$(1) \quad \eta(f(\ell g)) = \eta(f(g)), \quad \forall \ell \in G \quad \text{左側不変平均}$$

$$(2) \quad \eta(f(g \ell)) = \eta(f(g)), \quad \forall \ell \in G \quad \text{右側不変平均}$$

$$(3) \quad \text{上記二条件が同時に成立} \quad \text{(両側) 不変平均}$$

定義 不変平均  $\eta$  をもつ局所コンパクト群を乗順群という。

定理4 乗順群に対しては, 任意の不変平均  $\eta$  は  $\mathcal{C}$  上  $M$  に一致する。  $G$  が非コンパクトなら  $\eta$  は  $\mathcal{C}_0(G)$  上  $0$  である。

$\mathcal{O} : C^*$ 環,  $\mathcal{O}^* : \mathcal{O}$  の位相的共軛空間。

$\mathcal{C}(G, \sigma)$ :  $G$  上  $\sigma$  値弱有界弱連続関数全体, すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G, \sigma), \Psi \in \sigma^* \Rightarrow (\Psi, X(g)) \in \mathcal{C}(G)$$

このとき,  $\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty$ .

$\sigma^{**}$ :  $\sigma$  の enveloping  $W^*$  環

$\mathcal{L}(H)$ : ヒルベルト空間  $H$  上の有界作用素全体.

$\mathcal{C}(G, H)$ :  $G$  上  $\mathcal{L}(H)$  値有界弱連続関数全体, すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G, H), \Psi_1, \Psi_2 \in H \Rightarrow (\Psi_1, X(g)\Psi_2) \in \mathcal{C}(G),$$

$$\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty.$$

定理 5 (a)  $\mathcal{C}(G)$  の状態 ( $G$  上の平均という)  $\tilde{\nu}$  に対し,  
次式をみたす  $\mathcal{C}(G, \sigma)$  から  $\sigma^{**}$  への写像  $\tilde{\nu}$  が一意的に存在  
する.  $X \in \mathcal{C}(G, \sigma)$  に対し,

$$(\Psi, \tilde{\nu}(X)) = \tilde{\nu} \{ (\Psi, X(g)) \}, \quad (\forall \Psi \in \sigma^*)$$

この  $\tilde{\nu}$  は次の性質をもつ.

(1)  $X$  につき線形.

(2) 有界,  $\|\tilde{\nu}(X)\| \leq \|X\|$ .

(3) 正, すなわち  $X(g) \geq 0$  ( $g \in G$ )  $\Rightarrow \tilde{\nu}(X) \geq 0$ ,

(4)  $\tilde{\nu}(A) = A$ ,  $\tilde{\nu}(AX) = A\tilde{\nu}(X)$ ,  $\tilde{\nu}(XA) = \tilde{\nu}(X)A$  ( $\forall A \in \sigma$ ).

(b)  $G$  が非コンパクト, 乗順で  $\tilde{\nu}$  が右側不変なら,

$$\lim_{g \rightarrow \infty} (\Psi, X(g)) = 0 \quad (\Psi \in \sigma^*) \Rightarrow \tilde{\nu}(X) = 0$$

(c)  $\mathcal{C}(G)$  の状態  $\tilde{\nu}$  に対し (次式をみたす  $\mathcal{C}(G, H)$  から  $\mathcal{L}(H)$  への写像  $\tilde{\nu}$  が一意的に存在する.  $X \in \mathcal{C}(G, H)$  に対し,

$$(\Psi_1, \tilde{\nu}(X)\Psi_2) = \nu\{\langle \Psi_1, X(g)\Psi_2 \rangle\} \quad (\Psi_1, \Psi_2 \in H)$$

この  $\tilde{\nu}$  は次の性質をもつ.

- (1)  $X$  につき線形.
- (2) 有界,  $\|\tilde{\nu}(X)\| \leq \|X\|$ .
- (3) 正, すなわち,  $X(g) \geq 0 \quad (g \in G) \Rightarrow \tilde{\nu}(X) \geq 0$ .
- (4)  $\tilde{\nu}(A) = A, \tilde{\nu}(AX) = A\tilde{\nu}(X), \tilde{\nu}(XA) = \tilde{\nu}(X)A \quad (\forall A \in \mathcal{L}(H))$ .
- (5)  $\tilde{\nu}(X) \in \{X(g); g \in G\}''$

(d)  $G$  が柔順局所コンパクト群,  $U(g)$  が  $H$  上  $G$  の連続ユニタリ表現,  $E^0$  を  $G$  不変ベクトル全体への射影子とすると,

$$\tilde{\nu}(U(g)) = E^0.$$

$X$  が  $G$  の連続指標,  $E^x$  を  $U(g)\Psi = X(g)\Psi$  のようなベクトル  $\Psi$  全体への射影子とすると,

$$\tilde{\nu}(X^*U(g)) = E^x.$$

#### 1.4 M フィルター

$\{\alpha\}$ : フィルター

$f_\alpha$ :  $G$  上可測関数

定義  $\{f_\alpha\}$  が次の三条件をみたすとき右 M フィルターとい



う。

$$(1) f_\alpha(g) \geq 0$$

$$(2) \int f_\alpha(g) d\mu(g) = 1$$

$$(3) \lim_\alpha \int d\mu(g) |f_\alpha(g) - f_\alpha(gg')| = 0 \quad \forall g' \in G$$

ここに  $\mu$  は右側不変測度である。同様に左  $M$  フィルターも定義される。

定理 6 右  $M$  フィルター  $f_\alpha$  に対し、極限

$$\eta_f(h) = \lim_\alpha \int f_\alpha(g) h(g) d\mu(g)$$

が存在するときはそれを与える右側不変平均が存在する。

例 Van Hove 平均。  $G = \mathbb{R}^n$ ,  $\{\Lambda_k \subset \mathbb{R}^n, k=1, 2, \dots\}$

に対し

$$v_a^+(\Lambda) \equiv \{g; \Lambda \cap (S_a + g) \neq \emptyset\} \text{ の体積}$$

$$v_a^-(\Lambda) \equiv \{g; \Lambda \supset S_a + g\} \text{ の体積}$$

ただし  $S_a$  は原点中心半径  $a$  の球

$$\lim_k v_a^+(\Lambda_k) / v_a^-(\Lambda_k) = 1 \quad (\forall a)$$

のとき  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  と定義する。  $v(\Lambda)$  を  $\Lambda$  の体積とすると、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} v(\Lambda)^{-1} \int_\Lambda dx f(x)$$

は上の意味で不変平均を与える。

定義  $G$  上  $\mathcal{L}(H)$  値可測関数  $X$  に対し、次式をみたす  $\bar{X}_f^w$ ,  $\bar{X}_f^s$ ,  $\bar{X}_f^u \in \mathcal{L}(H)$  が存在すれば、それぞれ  $X$  の弱平均, 強平均, 一様平均という。

$$\lim_{\alpha} (\Psi_1, [\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^w] \Psi_2) = 0, \Psi_1, \Psi_2 \in H$$

$$\lim_{\alpha} \|\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^s\| = 0, \Psi \in H$$

$$\lim_{\alpha} \|\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^u\| = 0$$

もし存在すれば、いずれも  $\bar{\tau}_f(X)$  と一致する。

定理 7  $U$  が  $G$  の連続表現,  $f_{\alpha}$  が右  $M$  フィルター,  $\alpha$  が  $G$  の連続指標,  $E^{\alpha}$  を  $U(g)\Psi = \alpha(g)\Psi$  のようなベクトル  $\Psi$  全体への射影とすると,  $\alpha(g)^* U(g)$  の  $f_{\alpha}$  による強平均が存在して,  $E^{\alpha}$  に等しい。特に,  $U(g)$  の  $f_{\alpha}$  による強平均が存在して,  $E^0$  に等しい。

## § 2 $C^*$ 環の自己同型による群の表現

### 2.1 基礎的定義

$\tau: \mathcal{A}$  の自己同型による  $G$  の表現  $g \in G \rightarrow \tau_g \in \text{Aut } \mathcal{A}$

$\tau$  が 強連続 とは  $\lim_{g \rightarrow 1} \|\tau_g A - A\| = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$\tau$  が 一様連続 とは  $\lim_{g \rightarrow 1} \sup_{\|A\| \leq 1} \|\tau_g A - A\| = 0$

以下強連続を単に連続という。

共変表現 とは, ヒルベルト空間  $H$  上の  $\mathcal{A}$  の表現  $\pi$ ,  $G$  のユニタリ表現  $U$  の組で, 次式をみたすもの。

$$U(g) \pi(A) U(g)^{-1} = \pi(\tau_g A)$$

以下  $U(g)$  は連続とする。

$\mathcal{G}$  :  $\sigma$  の 状態全体

$H_\varphi, \Omega_\varphi, \pi_\varphi$  :  $\varphi \in \mathcal{G}$  に対し  $\varphi(A) = (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi)$

できるヒルベルト空間  $H_\varphi$ ,  $\sigma$  の  $H_\varphi$  上表現  $\pi_\varphi$ , 巡回ベクトル  $\Omega_\varphi \in H_\varphi$  の組。

$\mathcal{G}_0$  : 不変状態全体, すなわち  $\varphi \in \mathcal{G}$ ,  $\varphi(\tau_g A) = \varphi(A)$ ,

$U_\varphi$  :  $\varphi \in \mathcal{G}_0$  に対し,  $U_\varphi(g) \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi = \pi_\varphi(\tau_g A) \Omega_\varphi$

できる  $G$  のユニタリ表現。  $\tau$  が連続なら  $U_\varphi$  も連続。

$\tau$  が 漸近可換 とは  $\lim_{g \rightarrow \infty} \|\tau_g A, B\| = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma)$

$\tau$  が 弱漸近可換 とは  $\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(\tau_g A, B) = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \varphi \in \mathcal{G})$

$H$  上の表現  $\pi$  が 漸近可換 とは

$$\lim_{g \rightarrow \infty} (\Psi, \pi(\tau_g A, B) \Psi) = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in \mathcal{G}$  が 漸近可換 とは  $H_\varphi$  上  $\pi_\varphi$  が漸近可換なこと。

$\tau$  が  $\eta$  可換 とは,  $G$  の右または左不変平均  $\eta$  に対し,

$$\eta \{ \varphi(\tau_g A, B) \} = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \varphi \in \mathcal{G})$$

$H$  上の表現  $\pi$  が  $\eta$  可換 とは,

$$\eta \{ (\Psi, \pi(\tau_g A, B) \Psi) \} = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in \mathcal{G}$  が  $\eta$  可換 とは,  $H_\varphi$  上  $\pi_\varphi$  が  $\eta$  可換なこと。

$\tau$  が  $M$  可換 とは, 任意の  $A, B \in \sigma$ ,  $\varphi \in \mathcal{G}$  に対し,

$$f(g) \equiv |\varphi(\tau_g A, B)| \in \mathcal{E}, \quad M(f) = 0.$$

$H$  上の表現  $\pi$  が  $M$ 可換 とは, 任意の  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\Psi \in H$  に対して

$$f(g) \equiv |(\Psi, \pi([Z_g A, B]\Psi))| \in \mathcal{E}, \quad M(f) = 0$$

$\varphi \in G$  が  $M$ 可換 とは,  $H_\varphi$  上  $\pi_\varphi$  が  $M$ 可換なこと,

漸進可換,  $\tau$ 可換,  $M$ 可換の定義で  $\varphi \in G_0$ ,  $\Psi \in E^0 H$  等の条件をつける場合もある。

$\tau$  が表現  $\pi$  で 大きい とは,  $\mathcal{A}$  の任意の自己共軛元  $A$  に対し,

$$K(A) \equiv \overline{\text{conv}} \{ \pi(Z_g A); g \in G \}, \quad K(A) \cap \pi(\mathcal{A})' \neq \phi$$

ここに,  $\overline{\text{conv}} \{ \dots \}$  は  $\{ \dots \}$  の凸包の弱閉包。

$\tau$  が  $\varphi \in G$  で 大きい とは,  $\pi_\varphi$  で大きいこと。

$\tau$  が 大きい とは任意の  $\varphi \in G_0$  で大きいこと。

共変表現  $(\pi, U)$  が  $G$ 可換 とは,  $E^0 \pi(\mathcal{A}) E^0$  が可換なこと。

ここに  $E^0$  は  $U(G)$  不変ベクトル全体への射影

$\varphi \in G_0$  が  $G$ 可換 とは,  $(\pi_\varphi, U_\varphi)$  が  $G$ 可換なこと。

$\tau$  が  $G$ 可換とは, 任意の  $\varphi \in G_0$  が  $G$ 可換なこと。

## 2.2 相互関係

定理 8 (1)  $\tau$  が  $H$  上表現  $\pi$  で大きいための必要十分条件は, 任意の  $\Psi_j \in H$ ,  $n < \infty$ ,  $B_j \in \mathcal{A}$  ( $j = 1 \cdots n$ ),  $A \in \mathcal{A}$  に対して

$$\inf_{A' \in K(A)} \max_j |(\Psi_j, \pi([A', B_j])\Psi_j)| = 0$$

(2)  $H$ 上共変表現  $(\pi, U)$  が  $G$ 可換であるための必要十分条件は、任意の  $\Psi \in E^{\circ}H$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$  に対して

$$\inf_{A' \in K(A)} |(\Psi, \pi([A', B])\Psi)| = 0$$

(  $\inf_{\xi} |(\Psi, \pi([A, \tau_{\xi} B])\Psi)| = 0$  なら十分 )

### 定理9

(1)  $G$ が非コンパクト,  $\varphi$ が漸近可換  $\implies \tau$ は $\varphi$ で大きい  $\nearrow \varphi$ は $M$ 可換,

(2)  $G$ が柔順,  $\varphi$ が $M$ 可換  $\implies \varphi$ は $\mathcal{N}$ 可換 ( $\mathcal{N}$ 任意)

(3)  $\varphi$ が $M$ 可換  $\implies$   
 $\varphi$ が $\mathcal{N}$ 可換  $\implies \varphi$ は $G$ 可換.  
 $\varphi$ で $\tau$ が大きい  $\nearrow$

### 2.3 性質

$\mathcal{R}$ : 共変表現  $(\pi, U)$  で,  $\mathcal{R} \equiv (\pi(\mathcal{A}) \vee U(G))''$ ,

$\varphi \in \mathcal{G}_0$  に対しては,  $\mathcal{R} \equiv (\pi_{\varphi}(\mathcal{A}) \vee U_{\varphi}(G))''$ .

$\mathcal{Z}$ :  $\mathcal{R}$  の中心,

$\mathcal{E}$ :  $\overline{\pi(\mathcal{A})}$  の中心 ( $-$ は弱閉包)

$\mathcal{E}_0: \mathcal{E} \cap U(G)'$

定理10  $\tau$ が共変表現  $(\pi, U)$  で大きく,  $\mathcal{E}_0$ が忠実な $G$ 不変正規状態があるとする。(特に $\tau$ が $\varphi \in \mathcal{G}_0$ で大きければこの

条件がみたされる。) このとき  $\overline{\pi(\sigma)}$  から  $\mathcal{C}_0$  への写像  $\gamma$  で、次の性質をもつものが一意に存在する。

- (1)  $\gamma$  は線形, 正, 正規 (normal)
- (2)  $\gamma(U(g)AU(g)^{-1}) = \gamma(A)$
- (3)  $\gamma(AB) = \gamma(A)B$  ( $B \in \mathcal{C}_0$ ),  $\gamma(1) = 1$
- (4)  $\overline{\pi(\sigma)}$  の任意の正規  $G$  不変状態  $P$  に対し
- (5) 
$$P = (P|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \gamma$$
  

$$\gamma(A)E^0 = E^0AE^0$$

定理 11 (1) 共変表現  $(\pi U)$  が  $\mathcal{K}$  可換のためには

$$m_\pi(A) \equiv \tilde{\pi}\{U(g)AU(g)^{-1}\} \in \mathcal{C} \quad (\forall A \in \pi(\sigma))$$

が必要十分。このとき,  $m_\pi(A) \in \mathcal{C}_0$  である。また  $E^0 m_\pi(A) = E^0 A E^0$ 。

(2)  $\tau$  が  $\mathcal{K}$  可換であるためには,

$$m_\pi(A) \equiv \tilde{\pi}\{\tau_g A\} \in \sigma^{**} \text{ の中心} \quad (\forall A \in \sigma)$$

が必要十分である。

定理 12  $\varphi \in \mathcal{G}_0$  が  $M$  可換なら, 任意の  $f \in \overline{V}(G)$ ,  $\Psi_1, \Psi_2 \in H_\varphi$ ,  $A \in \sigma$  に対して

$$F(g) \equiv f(g)(\Psi_1, \pi_\varphi(\tau_g A)\Psi_2) \in \mathcal{E}$$

このとき  $\sigma$  から  $\mathcal{E}$  への写像  $M_f$  を

$$(\Psi_1, M_f(A)\Psi_2) = M(F)$$

で定義すると,  $f \rightarrow M_f$  は線形, 正 ( $f \geq 0, A \geq 0 \Rightarrow M_f(A) \geq 0$ ),  
有界 ( $\|M_f(A)\| \leq \|f\| \|A\|$ ), で次式をみたす.

$$M_f = M_{f_1} \quad \text{ただし } f = f_1 + f_2 \text{ は定理 1 (c) の分解.}$$

$$M_f(\tau_\varphi^{-1} A) = M_{L_\varphi f}(A)$$

$$U_\varphi(q) M_f(A) U_\varphi(q)^{-1} = M_{R_\varphi f}(A)$$

$$M_{f^*}(A) = M_f(A^*)^*$$

$$M_f(A) B E^0 = B M(f U_\varphi) \pi_\varphi(A) E^0$$

$$M_1(A) \in \mathcal{C}_0, \quad E^0 M_1(A) = E^0 A E^0$$

注意  $\gamma, M_1, m_\eta$  が共通に定義される場合はたがいに等しい.

定理 13 任意の共変表現  $(\pi, U)$  で

$$E^0 (E^0 \pi(\alpha) E^0)' = E^0 (E^0 \pi(\alpha)' E^0)'' = R' E^0$$

とし,  $E^0 H$  が  $\pi(\alpha)$  につき巡回的なら

$$A \in R' \iff A E^0 \in R' E^0$$

は  $R'$  と  $R' E^0$  の同型対応を与える。

定理 14  $E^0 H$  が  $\pi(\alpha)$  につき巡回的で 共変表現が  $G$  可換なら,

定理 13 の  $R' E^0$  は  $E^0 H$  で極大可換で (すなわち

$R' E^0 = (E^0 \pi(\alpha) E^0)'' E^0$ ), さらに  $R'$  は可換である。

定理15  $\varphi \in G_0$  が,  $M$ 可換,  $\eta$ 可換, または,  $\tau$ が $\varphi$ で大きい, のいずれかが成立すれば,  $R' = \mathbb{C}$  である。

## 2.4 共変環

$C^*$ 環 $\mathcal{O}$ と $G$ の $\text{Aut } \mathcal{O}$ による連続表現 $\tau$ が与えられたとき, 共変 $C^*$ 環 $\mathcal{O}^G$ とは, 次の $*$ 環に $C^*$ ノルムを入れて完備化したものである:

$$X \in \mathcal{O}^G : g \in G \rightarrow X(g) \in \mathcal{O},$$

$$\int \|X(g)\|^2 d\mu(g) < \infty \quad (\mu: \text{左側不変測度})$$

$$(X * Y)(g) = \int X(s) \tau_s Y(s^{-1}g) d\mu(s)$$

$$X^*(g) = \tau_g X(g^{-1})^* (d\mu(g^{-1}) / d\mu(g))$$

定理16  $\mathcal{O}$ 表現を含まない共変表現 $(\pi, U)$ と共変 $C^*$ 環 $\mathcal{O}^G$ の $\mathcal{O}$ 表現を含まない表現の間に, 次式により一対一対応が存在する. このとき $\hat{\pi}(\mathcal{O}^G)'' = R$ である。

$$\hat{\pi}(X)\Psi = \int \pi(X(g))U(g)\Psi d\mu(g) \quad (\forall \Psi \in H)$$

## §3 エルゴード状態と分解定理

### 3.1 エルゴード状態

定理17  $\varphi \in G_0$ が $G$ 可換なら,  $\varphi$ に対する次の条件は, たがいに同値である。



(1)  $\varphi$  は  $G_0$  の 1 次元 (正値  $\mathbb{C}$ -双線型)

(2) 各  $H_\varphi$  で 既約 ( $\Leftrightarrow$  実  $\varphi$  が  $\varphi$  の  $\varphi$  である)

(3)  $\dim E^\varphi H_\varphi = 1$  (すなわち,  $\Omega_\varphi(g)\Xi = \Xi, \forall g \in G \Rightarrow \Xi = c\Omega_\varphi$ )

注意 (3)  $\rightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (1) は  $G$  可換の仮定なしに成立。前項の定理を使って、いろいろの条件のもとで、 $\mathbb{R}$  をいろいろに書き変えると、上記と等価な異なる形の条件がいろいろ得られる。それは一々書かないことにする。

定理 18  $\varphi$  が  $G_0$  で 1 次元ならば、 $\varphi$  に対する次の条件は、上記条件と同等である。

$$(4) (\Omega_\varphi, \gamma(A)\pi_\varphi(B)\Omega_\varphi) = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(4') \gamma(A) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

定理 19  $\varphi \in G_0$  が  $M$  可換なら、次の条件は (4) と同等。

$$(5) M \{ \varphi(A^* \tau_g A) - |\varphi(A)|^2 \} = 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

$$(5') M \{ \varphi(A \tau_g B) \} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(5'') M_1(\pi_\varphi(\tau_g A)) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

定理 20  $\varphi \in G_0$  が  $\mathcal{N}$  可換なら、次の条件も (1) と同等。

$$(6) (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A^*) \mathcal{M}_\mathcal{N}(A) \Omega_\varphi) = |\varphi(A)|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

$$(6') \mathcal{N} \{ \varphi(A \tau_g B) \} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(6)' \quad \mu_n(A) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{O})$$

注意 (4), (5)', (6)' の条件は, 弱クラスター性といわれる。  
 が漸進可換で,  $\pi(\mathcal{O})$  がファクターならば, 次の強クラスター性が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(A \tau_g B) &= \varphi(A) \varphi(B) & (\forall A, B \in \mathcal{O}) \\ \omega\text{-}\lim_{g \rightarrow \infty} \pi_\varphi(\tau_g A) &= \varphi(A) \cdot 1 & (\forall A \in \mathcal{O}) \end{aligned}$$

### 3.2 分解定理

$G_0$  (弱\*コンパクト) の上の測度全体に

$\mu_1 \leq \mu_2 \iff \mu_1(f) \leq \mu_2(f)$ ,  $f$  は任意の連続凸関数により順序を入れる。実測度  $\delta_\varphi$  ( $\delta_\varphi(f) = f(\varphi)$ ) に対し

$$\delta_\varphi \leq \mu \implies \varphi(A) = \int \xi(A) d\mu(\xi)$$

もし測度  $\mu$  が  $G_0$  の端点集合の中に台を持てば, 上記は  $\varphi$  の端点状態 (エルゴード状態) への積分分解になる。そこでそのような分解が存在し一意のかが問題となる。

$$\mu \text{ の台} \subset \text{端点集合} \implies \mu \text{ は極大} (\mu \leq \mu' \implies \mu' = \mu)$$

そこで,  $\delta_\varphi \leq \mu$  をみたす極大な  $\mu$  が存在し一意のかが問題にする。

任意の  $\varphi \in G_0$  に対し,  $\delta_\varphi \leq \mu$  なる極大な  $\mu$  が一意のとき,  $G_0$  は単体であるという。たとえば, さらに  $G_0$  の境界が閉じていけば,  $\mu$  の台は端点集合に含まれる。

定理 22

- (1)  $1 \in \sigma$  であるが  $G$  可換なら  $G_0$  は単体である。  
 (2)  $\tau$  が大きくて,  $G_0 \neq \emptyset$  なら,  $G_0$  は単体である。

定理 23

- (1)  $\sigma$  が可分,  $\varphi \in G_0$  が  $G$  可換なら,  $E^\circ \pi_\varphi(\sigma) E^\circ$  で生成される可分可換  $C^*$  環に関する状態  $\varphi$  の端点分解  $\varphi = \int x d\mu(x)$  により,  $\varphi$  の  $G_0$  における端点分解

$$\varphi(A) = \int x (E^\circ A E^\circ) d\mu(x)$$

が与えられる。

- (2)  $1 \in \sigma$ ,  $\tau$  が  $G$  可換,  $\sigma_\alpha \subset \sigma$  が可附番個の  $C^*$  環で,  $\bigcup \sigma_\alpha$  が  $\sigma$  で稠密,  $\mathcal{I}_\alpha$  が  $\sigma_\alpha$  の可分閉両側イデアル,  $F_\alpha$  は  $\varphi \in G$  のうち  $\varphi|_{\mathcal{I}_\alpha}$  がノルム 1 のものの全体,  $F = \bigcap F_\alpha$ ,  $F^\circ = F \cap G_0$  とする。このとき積分分解

$$\varphi(A) = \int x(A) d\mu(x)$$

において,  $\mu$  の台は  $G_0$  の端点と  $F$  の共通部分に含まれる。

[第一級はこの形で具体的な応用例がある。]

注意  $\delta_\varphi \leq \mu$  をみたす極大測度  $\mu$  は

$$\mu(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n) = (\Omega_\varphi, E^\circ \pi_\varphi(A_1) E^\circ \cdots E^\circ \pi_\varphi(A_n) E^\circ \Omega_\varphi)$$

で決定される。ただし  $\hat{A}$  は  $G_0$  上の関数  $\hat{A}(\psi) \equiv \psi(A)$  であり,  $\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n$  は  $n$  個の関数  $\hat{A}_j(\psi)$  の積である。

定理24  $G_0$  が単体で、その端点集合が閉じているためには、ある可換  $C^*$  環  $B$  と、 $\sigma$  から  $B$  への写像  $\zeta$  で次の性質をみたすものの存在が必要十分である。 $\zeta$  は線形、正、 $\sigma(G)$  不変、 $\zeta(1)=1$ 、 $\zeta(\sigma)$  はノルムで  $\sigma$  の中で稠密、 $\psi \in G(B)$  から  $\psi \circ \zeta \in G_0$  への写像が  $G_0$  の上への写像である。ただし、 $G(B)$  は  $B$  の状態全体。このとき  $B$  は同型対応を除いて一意的。

注意  $G$  として  $\sigma$  のユニタリ作用素全体、 $\tau$  として内部自己同型をとると、 $\tau$  は大きくて、 $G_0$  は規格化されたトレース全体になる。このときの分解はファクタートレースへの分解である。

### 3.3 部分群に関する分解と弱 mixing 性

定理25  $\psi \in G_0$  が  $M$  可換  $\sigma$  のとき、 $\psi$  に対する次の条件は同値である。

$$(1) \dim E^F = 1 \quad (E^F \text{ は } \S 1.2 \text{ に定義}).$$

$$(2) M \{ |\psi(A^* \tau_g A) - |\psi(A)|^2 | \} = 0 \quad (\forall A \in \sigma).$$

$$(3) M \{ |(\Psi_1, \pi_\psi(\tau_g A) \Psi_2) - \psi(A)(\Psi_1, \Psi_2)| \} = 0 \quad (\forall A \in \sigma, \Psi_1, \Psi_2 \in H).$$

このような状態を 弱 mixing 状態 といい。

定理26  $\psi \in G_0$  が  $M$  可換でエルゴード状態とする、

$$M_{ab}^\psi(A) \equiv M_{f^*}(A), \quad f(g) = (a, U^\psi(g)b)$$

$$a, b \in H^\sigma, \quad A \in \mathcal{A}$$

とおくと,

$$U_\varphi(g) M_{a,b}^\sigma(A) U_\varphi(g)^{-1} = M_{a',b}^\sigma(A), \quad a' = U^\sigma(g)a$$

$$M_{a,b}^\sigma(A) \Omega_\varphi \subset H^\sigma \otimes H^\sigma$$

定理27  $T$  が弱漸近可換,  $G$  が非コンパクト,  $(\pi, U)$  が共変表現,  $N$  は  $U$  に含まれるすべての有限次元表現  $U^\sigma$  に対し  $U^\sigma(g) = 1$  となる  $g$  の作る  $G$  の部分群,  $\mathcal{G} = G/N$  がコンパクトまたは連結とする, このとき  $E^\pi(A) E^\pi(A)^\dagger$  ( $A \in \mathcal{A}$ ) は可換である.

定義  $T$  が弱漸近可換,  $\varphi \in \mathcal{G}_0$  がエルゴード状態,  $(\pi_\varphi, U_\varphi)$  に関する前定理の  $N, \mathcal{G}$  を  $N_\varphi, \mathcal{G}_\varphi$  と書く.

- (1)  $\varphi$  が  $E_I$  状態とは, 定理25の条件がみたされているとき, すなわち  $N_\varphi = G$  のとき.
- (2)  $\varphi$  が  $E_{II}$  状態とは  $N_\varphi \neq G$  で,  $\mathcal{G}_\varphi$  がコンパクトのとき.
- (3)  $\varphi$  が  $E_{III}$  状態とは  $\mathcal{G}_\varphi$  が非コンパクトのとき.

定理28 位相群  $G$  の閉不変部分群  $H$  に対し  $G/H$  がコンパクトで  $G$  不変測度  $dg$  をしても  $\alpha$  とする.  $\int_{G/H} dg = 1$  とする, さらに  $T$  が連続で,  $\varphi \in \mathcal{G}_0$  がエルゴード状態とする. そのとき  $\mathcal{A}$  の  $H$  不変状態全体  $\mathcal{G}_0^H$  の端点集合の中に台をもつ測度  $\mu$  で  $\mu \geq \delta_\varphi$  となるものが存在する. さらに  $\mathcal{G}_0^H$  の端点  $\tilde{\varphi}_H$  が

存在して,

$$\mu(\psi) = \int_{G/H} dg \psi(\tau_g^* \tilde{\varphi}_H) \quad (\forall \psi \in \mathcal{C}(G_o^H))$$

特に,

$$\varphi(A) = \int_{G/H} dg \tilde{\varphi}_H(\tau_g^{-1} A) \quad (\forall A \in \mathcal{O})$$

$\tau$  が漸近可換ならばこの分解は一意的で,  $\tilde{\varphi}_H$  は  $\tau_g^*$  での変換を除いて一意的に定まる。

$\varphi$  が  $E_I$  状態なら,  $\tilde{\varphi}_H = \varphi$ ,  $\varphi$  が  $E_{II}$  状態のとき,  $H = N_\varphi$  にとれば,  $\tilde{\varphi}_H$  は  $N_\varphi$  について  $E_I$  状態であり, 任意の  $H$  については

$$\tilde{\varphi}_H(A) = \int_{H/(H \cap N_\varphi)} dg \tilde{\varphi}_{N_\varphi}(\tau_g^{-1} A)$$

### 定理 29 (スペクトルの性質)

(1)  $\tau$  が  $M$  可換で  $\varphi \in \mathcal{G}_o$  がエルゴード状態のとき,  $U^\sigma, U^{\sigma'}$  が  $U_\varphi$  に含まれていれば  $U^\sigma \otimes U^{\sigma'}$  は  $U$  と disjoint ではない。また  $U^\sigma$  も  $U$  に含まれる。(示は  $\sigma$  に複素共軛な表現)

(2) 定理 28 の場合,  $\varphi$  が  $E_{II}$  状態なら  $E^F$  における  $G$  の表現は  $\mathcal{G}_\varphi$  の正則表現である。

注意  $E^F H_\varphi = \{\psi \in H_\varphi, U_g \psi = \psi \quad (\forall g \in N_\varphi)\}$  ( $\varphi$  は  $E_{II}$  状態)

### 3.4 概同期状態

$B$ : バーナッハ空間

$\mathcal{G}$ :  $B$  の isometry の作るある群

$AP(B)$ : 概同期元の全体, すなわち  $x \in B$  で  $\{gx, g \in \mathcal{G}\}$

がノルム位相で条件的コンパクトなもの全体,

(i.e.  $\overline{\mathcal{G}x}$  が  $B$  でコンパクト,)  $B$  の  $G$  不変閉部分空間

$B = H$  (ヒルベルト空間)

$$\Psi \in AP(H) \iff (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathcal{G}) (\equiv AP(\mathcal{C}(\mathcal{G})))$$

$$\iff (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathcal{G})$$

$$\iff \Psi \in E^F H$$

$B = \mathcal{O}^*$ ,  $\mathcal{G} = \tau(G)^*$  のとき  $\mathcal{G} \cap AP(\mathcal{O}^*)$  の元を 概同期

状態 という。

定理30  $G$  が局所コンパクト可換群,  $\tau$  が弱漸近可換,  $\varphi$  を概同期状態とすると,  $\mathcal{G}$  上の測度のうち  $\mu' = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{\varphi_i}$ ,  $N > \infty$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ ,  $\sum \alpha_i \varphi_i = \varphi$ ,  $\varphi_i$  は概同期的, のような  $\mu'$  で弱\*位相で近似できる測度には, 一意的に極大測度  $\mu_\varphi$  が存在する。

#### §4 その他

定理31  $\varphi \in \mathcal{G}_0$  が大きくて,  $R \equiv \pi_\varphi(\mathcal{O}^*)$  がファクターとする。

このとき次のいずれかが成立する。

- (1)  $R$  は III 型  $\iff R'$  が有限型でない。
- (2)  $R$  が有限型  $\iff \varphi$  がトレースを与える。  
 (このとき *coupling* は 1)
- (3)  $R$  が  $I_\infty$  または  $II_\infty$  型  $\iff R'$  が有限型で  $\varphi$  はトレースでない。

$G = R$  の場合, ある解析関数  $F_{AB}(Z)$  で  $\varphi(A\tau_t B) = F(t)$ ,  
 $\varphi((\tau_t B), A) = F(t + i\beta)$  ( $\beta$  は定数) となるものが, 任意の  $A, B \in \mathcal{A}$  に対し存在するような  $\varphi \in G_0$  は, KMS 条件 をみたすという。このような  $\varphi$  についていくつかの事実が知られている。また  $U_\varphi(t) = e^{iHt}$  と書いたときの  $H$  が下に有界のような表現は, 上記の  $\beta \rightarrow \infty$  の極限とも考えられ, それについても特殊な性質が知られている。 $\beta = 0$  ならトレース状態である。



## 文 献

- S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 1-28.
- D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 133-150.
- D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 151-180.
- D. Ruelle and D. W. Robinson, Ann. Inst. H. Poincaré, "Extremal Invariant States".
- O. E. Lanford and D. Ruelle, J. M. P. 8 (1967), 1460-1463.
- E. Størmer, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.
- S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 101-120.
- S. Doplicher and D. Kastler, Commun. Math. Phys. 7 (1968), 1-20.
- D. Ruelle, Almost periodic states on C\*-algebras.
- E. Størmer, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 194-204.
- N. M. Hugenholtz, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 189-193.