

群環を与える double Hilbert algebra.

京大 理 辰 馬 伸 秀

quasi-Hilbert algebra (定義は, J. Dixmier : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier Villars, Paris (1957) p66. 参照) (以下 \mathfrak{g} -Hilb-alg. と表記する) は群環を model として定義されたものと思われるが, 次の例の示すように群環を与えない \mathfrak{g} -Hilb-alg. がある.

例) n 次の複素正方行列全体が普通の和と積および各行列要素の乗積の和のノルムにより作った Hilb-alg. は群環を与えない. 単群 G の群環を与えるものとするれば, $L^2(G)$ に存在する Hilbert space は n 次元で, 従って G の位数は n となる. n 個の群は可換, 従ってその群環も可換であるが, 明らかに上記の algebra は非可換であり, 矛盾する.

そこで, どのような \mathfrak{g} -Hilb-alg. が, ある locally compact 群の群環を与えるのか?, さらにそのような群を実際に構成

たるといふ問題が考えられる。上の例がわかるように、この問題をとくには、異なる \mathfrak{g} -Hilb-alg. の構造と異なる何か他の構造を合わせ考える必要がある。

そこで一方、locally compact 群 G が与えられたとき、 $L^2(G)$ 中で dense な函数空間 $C_0(G)$ (自らが compact な連続函数の全体) の作る \mathfrak{g} -Hilb-alg. の構造としては、 G の群環の構造の制限の他に、普通の函数としての積と、complex conjugation をそれぞれ \ast 操作として involution とする可換な Hilb-alg. の構造が考えられる。

従つて、上記の問題の一つの formulation として、同じ pre-Hilbert space の structure を与えた二つの \mathfrak{g} -Hilb-alg. の構造 (double Hilbert algebra) が与えられたとして出発する事が考えられる。当然この二つの structure の間には、何らかの関係が必要であり、それを求める事が課題となる。この立場にもとづいて、T. U. Kazu (G. I. Katz) は "Kольца вале группы и принцип двойственности (Ring groups and the duality principle) I, II, Пробы Моск. Мат. Общ. 12 (1963) pp 259~304 (A.M.S. Transl. Mosc. Math. Soc. pp 271~339); 13 (1965) pp 84~113 (Transl. pp 94~126)." で unimodular な群の群環を与える double Hilbert algebra の必要十分条件を与えている。

\Rightarrow では, T. U. Kay の論文の double Hilbert algebra に関する部分を unimodular と呼ぶ群の群環について拡張する。

さらに, Kay の論文の表題に示すように, この問題は群 G の dual から G を構成するという locally compact 群の duality の問題と密接に関連して居り, 証明その他の考え方としても多分に duality のそれと重複するので, duality との関連等の考察も併行して行うつもりで行きたい。

§1. 群に付随した double Hilbert algebra.

まず記号の説明と履帯の意味をあわせて, locally compact 群 G 上に与えられる g -Hilb-alg. の構造をあげる。

dg を G 上の右不変測度とし, $\Delta(g) \equiv (d^2g/dg)$ とする。 $A \equiv C_0(G)$ とかく。(A は更に他の空間にもとれるが \Rightarrow では一応 $C_0(G)$ をとる。) A は内積

$$\langle x, y \rangle = \int x(g) \overline{y(g)} dg, \quad (x, y \in A)$$

によって, $\mathcal{H} \equiv L^2(G)$ 中の dense subspace となる。

A) 群環としての g -Hilb-alg. の構造。

$$x \cdot y(g) \equiv \int x(gg_1^{-1}) y(g_1) dg_1, \quad (x, y \in A) \quad [\text{積}],$$

$$x^*(g) \equiv \overline{x(g^{-1})} (\Delta(g))^{-1/2}, \quad (x \in A) \quad [\text{involution}],$$

$$x'(g) \equiv x(g) (\Delta(g))^{1/2}, \quad (x \in A).$$

と定義すれば, この構造により A は \mathfrak{g} -Hilb-alg. となる.

B) 函数環としての Hilb-alg. の構造.

$$x \times y(\mathfrak{g}) \equiv x(\mathfrak{g})y(\mathfrak{g}), \quad (x, y \in A) \quad [\text{積}],$$

$$x^*(\mathfrak{g}) \equiv \overline{x(\mathfrak{g})}, \quad (x \in A) \quad [\text{involution}],$$

と定義すれば, この構造により A は可換な Hilb-alg. となる.

従って, ある double Hilbert algebra が上に示した形の下に locally compact 群の群環を導くものとするれば, 群環構造と異なる方の \mathfrak{g} -Hilb-alg. の構造は可換でなくともならない. 以下この形の double Hilbert algebra を考えよう.

3.2. semi-abelian double Hilbert algebra. (s.d. Hilb-alg.)

定義 \mathbb{C} 上の linear space A 上に,

1) 内積 $\langle x, y \rangle$ と 2 種の積 $x \cdot y, x \times y$ とそれに対応する 2 種の involution x^*, x^\times , さらに onto の linear map x^\wedge が定義されていて,

2) 上の内積と, 積 $x \cdot y$, involution x^* , linear map x^\wedge により, A は \mathfrak{g} -Hilb-alg.

3) 同じ内積と, 積 $x \times y$, involution x^\times により, A は可換な Hilb-alg.,

となるとき, A を semi-abelian double Hilbert algebra (s.d. Hilb-alg. と略記) といい.

⇒ 多少し技巧的であるが以下使う条件.

$$*) \quad \langle x, y^\wedge \rangle = \langle x^\wedge, y \rangle,$$

$$*) \quad (x \times y)^\# = x^{\# \wedge} \times y^\#,$$

を定義に合わせて, "s.d. Hilb-alg." と云えば $*)$, $*)$ を満たすものをしておく.

又 A を上の内積により completion してえられる Hilbert space を \mathcal{H} とし, A 上の involution $x^\#$ を \mathcal{H} 上に連続に拡張した写像 (1対1 onto に付き) を J と示す.

定義 $\{ \varphi_\alpha \}$ を A からとった \mathcal{H} の一列の完全正規直交系とする. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上に.

$$W(x \otimes y) = \sum_x \varphi_\alpha \otimes (y \times (\varphi_\alpha^{\# \wedge} \cdot x)) \quad (x, y \in A),$$

によつて bounded operator が定義される時に, これを generative operator と呼ぶことにしよう.

Kaity はこの W を

$$\langle x^{\# \wedge} \otimes y, W(u \otimes w^\#) \rangle = \langle w \times y, x \cdot u \rangle$$

の形で定義しているが, 両辺を $\{ \varphi_\alpha \}$ で展開することによつて, 上の定義と同じものを与えることがわかる. 特にこの形がう見れば, W は $\{ \varphi_\alpha \}$ のとり方に関係しないことが明らかである.

結論の定理は, この W により次のようにおうかされる.

定理. semi-abelian double Hilbert algebra A が第一の

\mathfrak{g} -Hilb-alg. の構造に関して群環を導くためには,

- 1) generative operator W が存在して unitary である,
- 2) $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の空間で, i 番目の \mathfrak{g} と j 番目の \mathfrak{g} の二つをまとめた上に W を作用させたもの, $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 上の作用素を $W(i, j)$ とかくとき,

$$W(2, 3) W(1, 2) (W(2, 3))^{-1} = W(1, 2) W(1, 3)$$

をみたす,

のりえを満足することが必要十分である.

そしてこのとき base になる群は, \mathfrak{g} 上の non-zero bounded operator T で

$$W(T \otimes T) = (I \otimes T) W$$

をみたすものの全体に, 作用素としての群 (環と同じになる) 位相を入れた群として実現される.

§1 のようにおいた場合, 計算により確かめられるように, generative operator は, $x, y \in L^2(G)$ に対して

$$x(g_1) y(g_2) \longrightarrow x(g_1 g_2) y(g_2) \quad (*)$$

となる写像を与えるから, 1) は明らかで, 2) も群の元の積の結合群から容易に確かめられる. 大定理の後半は, 群に対する duality から, $g \rightarrow R_g$ の写像の image による実現である.

従って証明には十分性を示すことが, 重要となる.

§3. generative operator W .

定理の証明に入る前に少し脱線をして, generative operator W について考察する. W は実は群の duality の証明の ~~際~~ 既にあらわれて居る. すなわち, 正則表現 R のテンソル積 $R \otimes R$ を R の多重直和に分解したときの (完全正規直交系 $\{q_\alpha\}$ に對する) 同値対応

$$x \otimes y \longrightarrow \{ \langle R_g x, q_\alpha \rangle y(g) \}_\alpha \\ (L^2(G) \otimes L^2(G) \longrightarrow \sum_\alpha L^2(G)),$$

よりえられる $L^2(G) \otimes L^2(G)$ 上の unitary operator

$$W; x \otimes y \longrightarrow \sum_\alpha q_\alpha \otimes (\langle R \cdot x, q_\alpha \rangle y)$$

が, $\{q_\alpha\}$ のとり方によらず, (*) で与えられる operator と一致することは容易にわかる.

従つて, duality の証明から, §2 の定理の後半の群が対応する群を与えることになる. W は群と 1 対 1 に対応し, 従つて群を特徴づけるものである.

一方 W を展開形にかいて,

$$W(x \otimes y) = \sum_g q_g \otimes w(x, q_g) y$$

($w(x, q_g)$ は $L^2(G)$ 上の bounded operator)

とかくとき, \mathcal{H} 上の変換 J とは

$$W(x \otimes Jy) = \sum_g q_g \otimes J(w(q_g, x)y) \quad (**)$$

となることは容易に示される. これから次が云える.

補題 ある \mathcal{H} から \mathcal{H} の上への変換 J について, (**)
をみたすような unitary な W については, 任意に $\alpha (\neq 0)$
を固定したときには, $\{W(\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha; \alpha \in \mathcal{H}, \alpha\}$ は \mathcal{H} をほる.

証明 W は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上で unitary であるから, 任意に固
定した $\varphi_\alpha (\neq 0)$ に対して, $\{W(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha; \alpha \in \mathcal{H}, \alpha\}$ は \mathcal{H}
をほる. 一方(**)より, $W(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)\alpha = J W(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) J \alpha$ で
あり, J は \mathcal{H} 上 onto な写像であるから, $\{W(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha;$
 $\alpha \in \mathcal{H}, \alpha\}$ は \mathcal{H} をほる. $\varphi_\alpha = \alpha$ とおけば結論をうる.

\Rightarrow 意味ある \Rightarrow とは, 一般に次の補題の成立すること
である.

補題 W を $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上の unitary operator で, しかも
前補題の結論の成立するものとする. このとき,

$$W(T \otimes T) = (I \otimes T) W \quad (***)$$

をみたす \mathcal{H} 上の non-zero bounded operator は

$$W(L \otimes I) = (L \otimes I) W$$

となる L と可換な unitary operator になる. 又かつ T
の全体 G は弱(=強)位相で locally compact 群を作る.

又 T を bounded の条件をはずし, closed operator ($\neq 0$) で
(***) をみたすものにとると, このような T の全体は,
ある意味で G の稠密化を与える. (以下 "closed operator"
といえば, dense domain を持つもののみをさす.)

補題の前半の証明は, "数学"誌第20巻2号に詳しく載っていたので省略し, \Rightarrow では後半のみを示す。以下 (T, \mathcal{D}) を又た $\neq 0$ non-zero closed operator を admissible であると呼ぶ。

i) まず T が admissible なら, T^* も, さらに T^*T も $\neq 0$ であることが容易に分かる。

ii) 次に admissible な T について, $(T^{-1}(0))^{\perp}$ への projection は又 admissible になるが, bounded であるから, 補題の前半によつて unitary, さらには identity に等しい。これより, $T^{-1}(0) = \{0\}$ が結論される。

iii) さて, 正定値自己共役な admissible な T のスペクトル分解を $T = \int_0^{\infty} \lambda E(d\lambda)$ とする。ii) より $E(0) = 0$ 。

$P_{(a,b)} \equiv (E(b) - E(a))$, $\mathcal{G}_{(a,b)} \equiv P_{(a,b)}\mathcal{G}$, $(a < b)$, とおけば, projection $W(P_{(a,b)} \otimes P_{(c,d)})W^{-1}$ は $I \otimes P_{(ac, bd)}$ ($a < b, c < d$) でおさえられるから,

$$W(\mathcal{G}_{(a,b)} \otimes \mathcal{G}_{(c,d)}) \subset \mathcal{G}_{(ac, bd)}.$$

$$\text{一方 } \sqrt{x} = \sum_{R=0}^{\infty} a_R (1-x)^R, \quad (|1-x| < 1, \quad a_R = - (2R)! / (2R-1) 2^{2R} (R!)^2)$$

の展開に対応して,

$\forall u \in \mathcal{G}_{(a,b)}, \forall v \in \mathcal{G}_{(c,d)}$ ($a \cdot c \neq 0$) をとれば,

$$I \otimes \sum_{R=0}^{\infty} a_R (I - (bd)^{-1}T)^R W(u \otimes v), \quad \sum_{R=0}^{\infty} a_R (I \otimes I - (bd)^{-1}T \otimes T)^R (u \otimes v)$$

はそれぞれ $I \otimes \sqrt{(b \cdot d)^{-1}T} W(u \otimes v)$, $\sqrt{(b \cdot d)^{-1}T} \otimes T (u \otimes v)$ に強収束する。正定値作用素 $T \otimes T$ の平方根の一意的から,

$\sqrt{T \otimes T}(u \otimes v) = (\sqrt{T} \otimes \sqrt{T})(u \otimes v)$. 一方 (***) より,
 $(I - (b \cdot d)^{-1} T)^R W = W (I \otimes I - (b \cdot d)^{-1} T \otimes T)^R$, 従って,
 $(I \otimes \sqrt{T}) W (u \otimes v) = W (\sqrt{T} \otimes \sqrt{T})(u \otimes v)$. a, b, c, d
 の任意性と \sqrt{T} の閉性によつて, \sqrt{T} は又 admissible である.

iv) iii) をくり返し適用して, 正定値自己共役 admissible な
 T に対して, $T^{2 \times 2 \times m}$ の形の operator は又 admissible
 になる. 再び $u \in \mathcal{G}(a, b)$, $v \in \mathcal{G}(c, d)$ なる元=作用させて
 考えると, one-parameter 群 $\{T^t\}$ ($-\infty < t < \infty$) の全て
 の元が admissible であることが言える. $\{T^t\}$ は $A \equiv$
 $\int_0^\infty \log \lambda E(d\lambda)$ ($E(0) = 0$ より) 定義される. により $T^t = e^{tA}$
 と示される. A は又正定値自己共役であり,

$$(I \otimes A) W = W (A \otimes I + I \otimes A), \text{ をみたす.}$$

v) iv) の A について, $\Pi^t \equiv e^{itA}$ を考えると,
 これは dense domain をもち, unitary な族をもつ. この
 族は又 admissible であり, 有界であるから G に属する.
 なお $\{T^t\}$ は G 中の one-parameter 群を与える. 先の
 T^t とくみあわせて, $T^{2 \times 2 \times m} \Pi^t = e^{(2+i\pi)A}$ は G 中の
 one-parameter 群 $\{\Pi^t\}$ の複素化と考えることが出来る.

vi) 任意の admissible な T については, その標準分解を
 $T = \Pi H$ とすると, $H = \sqrt{T^* T}$ であるから, H は又
 admissible であり ii) より H^{-1} が存在する. 従って, $\Pi = T H^{-1}$

は又 *admissible* でしかも有界である。したがって G の元を与えることとなる。すなわち、任意の *admissible operator* T は、 G の中のある *one-parameter* 群 $\{\Pi_t\} \equiv \{e^{itA}\}$ から作られた e^A と、 G のある元 Π によって、 $T = \Pi \cdot e^A$ と示される。これが補題で云う " G の複素化" の意味である。

(証明終り)

なほ余談になるが、上の補題を群に対する *duality* の組みあわせて考える。すなわち、*locally compact* 群 G_0 が与えられたとき、 Π を G_0 から作った *generative operator* とするならば、補題で作った G は *duality* の結論により、 G_0 と一致するから、補題の後半は、任意の *locally compact* 群の複素化の一つを定義するものとみてよいであろう。ここで G から引き出した部分、特に正定値作用素からなる部分が G の *one-parameter* 群の複素化に対応するもののみから成ることは興味がある。そして、複素化の全体が、 G と正定値作用素との積で示されることは、複素化の構造をある意味で簡明にするものと云えよう。

G が特に *Lie* 群であるとき、*one-parameter* 群の集合でうめつくされる G の単位元の近傍があるから、上の定義は本来の意味の G の複素化を与えることになる。これは又、

淡中双対定理の応用として, compact Lie 群の複素化を導いた C. Chevalley の結果 ("Theory of Lie groups" Chap. III) に対応するものである。

上の補題で見られるように, W に定理の条件 2) がなくても, 本質的に (*) の形の operator でなくても, 一対対応した locally compact 群は作ることができる。しかしたとえば, $W \equiv A \oplus B$ 時に $W \equiv I \oplus I$ (identity) とおいて, 補題を適用すれば, 対応する G は trivial (I のみからなる群) になることからわかるように, 群環を導くためには, W が generative operator の形をしていることが必要である。こゝにも, W の構造について問題が残っている。

54. 定理の証明.

定理の証明は, duality のそれを殆ど重複して述べることになるので, あらまし程度にとどめる。

i) まず A の可換 Hilb-alg. 構造によつて, \mathcal{G} を dual である測度空間 (M, μ) の上の $L^2(M)$ として実現する。 M に, $(x^* \cdot y)(m) \quad (x, y \in A, m \in M)$ を連続とする最弱の topology を入れ, locally compact とする。 $x^*(m) = \bar{x}(m)$ $(x \cdot y)(m) = x(m)y(m)$ は定義よりあきらかである。

ii) $(x^* \wedge y)(m) = \langle R_m y, x \rangle$ によつて, bounded

linear operator R_m が \mathcal{G} 上に定義され,

$$W(x \otimes y)(m_1, m_2) = R_{m_2} x(m_1) y(m_2).$$

定理の W の条件 2) は, R_m が $(***)$ をみたすことを示す。又 $m \rightarrow R_m$ が 1対1の対応であることも容易。

iii) 一方 $(***)$ をみたす T は, A の可換環構造の自己同型をひきおこし, $R_m T = R_{T^{-1}(m)}$ が成立する。

まとめると, \mathcal{M} を R_m の集合と見るときに, operator の積の演算で \mathcal{M} は群を作り, 弱位相により locally compact となる。 μ がこの群の右不変測度を与え, A 上の演算が §1 で例示したものに対応することは容易に示される。

§5. あとがき,

今, s. d. Hilb-alg. の定義で, A 上の積 $*$, χ がともに可換である場合を考える。(この時 linear map. χ^{-1} は identity map になる)。テンソル積の順序と, 記号 $*$ と χ の入れかえを行うと, W と全く同様にして, 対応する operator W_1 がえられるが, これは W^* でテンソル積の順序を交換したものである。定理の 1) 2) の条件が W で成立することと W_1 で成立することとは同値である。云いかえるなら,

補題 可換な s. d. Hilb-alg. A が $*$ を convolution, χ を 函数の積としてある可換群 G の群環を導くとき, 同時に,

可換群 \hat{G} があって, A は \times を convolution, $*$ を函数の積として \hat{G} の群環を導く.

\hat{G} が G の character 全体の作る群になることは別に証明されるが, この補題はある意味で Pontryagin の duality を与えるものといえる.

積 $*$, \times を非可換の場合に拡張しようというのが, Kauly の duality principle であるが, これ先に示して来たように locally compact 群の群環を導こうとする場合, 積の一方が可換でなければならぬので, 積の両方共が非可換であるとすれば, 群より一層広い概念を考えることとなる. Kauly の ring group はこの idea につながるものである.

又 generative operator W を与えて, それから議論を導くことも考えられるが, これは W に課すべき条件が複雑になるものと予想される.