数理解析研究所講究録
50巻 1968年 36-45

球バンドルのホモトピー群

京大理　　岡　七郎

§1. 序

[7]におけるB(p)の一般化として、次のような cell complex

$$B_n(p) = S^{2n+1} \cup e^{2n+2p-1} \cup e^{4n+2p} \qquad (B_1(p) = B(p) \text{ in } [7]) \qquad n \geq 1$$

(1.1) $\quad H^*(B_n(p) ; Z_p) = \Lambda(u, \mathcal{P}^1 u) \qquad \deg u = 2n+1$

を考える。（pはこゝでは常に奇素数とする。）これは $S^{2n+2p-1}$ 上の S^{2n+1}-バンドルとして実現され、$(2n+2p-1)$-cell の attaching map (i.e. バンドル $B_n(p)$ の characteristic class）は

(1.2) $\quad \alpha_1(2n+1) \in \pi_{2n+2p-1}(S^{2n+1} ; p) \approx Z_p$

である。（$\pi_i(\ ; p)$ でホモトピー群の p-成分をあらわす。）

ここでは、$B_n(p)$ のホモトピー群の計算をし、classical group のホモトピー群への応用を考えたい。

ホモトピー群の計算のため、バンドル $S^{2n+1} \xrightarrow{i} B_n(p) \xrightarrow{j} S^{2n+2p-1}$ のホモトピー完全系列の boundary 準同型

(1.3) $\quad \partial_n : \pi_{i+1}(S^{2n+2p-1}) \longrightarrow \pi_i(S^{2n+1})$

をしらべる。まず(1.2)からあきらかに

(1.4) $\partial_n(S^2\gamma) = \alpha_1(2n+1)\circ S\gamma$, $\forall\gamma\in\pi_{i-1}(S^{2n+2p-3})$

である。また、後の(1.7)の特別な場合として、

(1.5) $S^2\circ\partial_n = \partial_{n+1}\circ S^2$

が成りたつ。写像

(1.6) $f:\ S^2B_n(p)\to B_{n+1}(p)$

で、f_* が $H_i(\ ;Z)$ $i<4n+2p+2$ の同型になるものがあり、$\Omega^2 f:$ $B_n(p)\to\Omega^2B_{n+1}(p)$ の写像柱を考えることにより $B_n(p)\subset\Omega^2B_{n+1}(p)$ とみなし $QB_n(p)=\Omega(\Omega^2B_{n+1}(p),\ B_n(p))$ とおく。すると、

(1.7)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "p_*"] & \vdots \arrow[d, "p_*"] & \vdots \arrow[d, "p_*"] & \vdots \arrow[d, "p_*"] & \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{i+1}(S^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "S^2"] & \pi_i(S^{2n+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "S^2"] & \pi_i(B_n(p)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*\circ S^2"] & \pi_i(S^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "S^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{i+3}(S^{2n+2p+1}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "H^{(2)}"] & \pi_{i+2}(S^{2n+3}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H^{(2)}"] & \pi_{i+2}(B_{n+1}(p)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "H^{(2)}"] & \pi_{i+2}(S^{2n+2p+1}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "H^{(2)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_i(Q_2^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\bar\partial_n"] \arrow[d, "p_*"] & \pi_{i-1}(Q_2^{2n+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "p_*"] & \pi_{i-1}(QB_n(p)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"] & \pi_{i-1}(Q_2^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\bar\partial_n"] \arrow[d, "p_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_i(S^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "S^2"] & \pi_{i-1}(S^{2n+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "S^2"] & \pi_{i-1}(B_n(p)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*\circ S^2"] & \pi_{i-1}(S^{2n+2p-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "S^2"] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

なる可換で各行各列とも完全な図式がある。ここで $Q_2^{2m+1} =$ $\Omega(\Omega^2S^{2m+3},\ S^{2m+1})$ $m=0,1,2,\cdots$ 。(1.7)の1,2,4列は別の完全系列

(1.8) $\cdots\xrightarrow{\Delta}\pi_i(S^{2mp-1};p)\xrightarrow{I'}\pi_{i-2}(Q_2^{2m-1};p)\xrightarrow{I}\pi_{i+1}(S^{2mp+1};p)\xrightarrow{\Delta}\pi_{i-1}(S^{2mp-1};p)\xrightarrow{I'}\cdots$

とともに球面のunstableホモトピー群のp-成分の計算に使われるものである。([6],[8])

定理：$\beta_1(2np+1)$ を $\pi_{2np+2p(p-1)-1}(S^{2np+1};p)\approx Z_p$ の生成元とすると、

(1.9) $I\circ\bar{\partial}_{n-1}\circ I'(S^2\gamma)=x\cdot\beta_1(2np+1)\circ S^2\gamma$, $x\not\equiv 0\pmod{p}$ $\forall\gamma\in\pi_{i-2}(S^{2(n+p-1)p-3};p)$

$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1};p)$ は[8]において、$k<2(p^2+p)(p-1)-5$ の範囲で決定されており、その各生成元については、(1.4), (1.5), (1.7), (1.9) 及び Moore 空間の安定ホモトピー環における関係([9])によりその ∂_n-image は決まる。群の拡大を求めるために補題5，補題6が使われる。その結果 $\pi_{2n+1+k}(B_n(p);p)$, $k<2(p^2+p)(p-1)-5$ は

(1.10) $k=2r(p-1)-2$ $(r>p+2)$, $n<r-p-1$ ($r=2p+1, p^2+1$ のときは $n\leq r-p-1$)

の場合をのぞいて決定できる。(1.10) の場合は群の位数しか決まらないが，(1.9) をより精密化すれば解決できる。この点は残されたままである。

応用として、Classical group のホモトピー群に関し、[7]の拡張として次の $\mathcal{C}_p$-同型が成り立つ。($\underset{p}{\approx}$ は $\mathcal{C}_p$-同型、+は直和)．

(1.11) $\pi_i(B_1(p))+\pi_i(B_2(p))+\cdots+\pi_i(B_n(p))+\pi_i(S^{2n+3})+\cdots+\pi_i(S^{2p-1})\underset{p}{\approx}\pi_i(SU(n+p))$ $\quad n<p$

(1.12) $\pi_i(B_1(p))+\pi_i(B_3(p))+\cdots+\pi_i(B_{2n-1}(p))+\pi_i(S^{4n+3})+\cdots+\pi_i(S^{2p-3})\underset{p}{\approx}\pi_i(Sp(n+\frac{p-1}{2}))$, $n<\frac{p+1}{2}$

これらと[2]の結果とを比較することより，$\pi_i(SU(n))$, $\pi_i(Sp(n))$ をもう少し求めることも出来る。

§2. $B_n(p)$ の定義と性質

Stiefel 多様体によるバンドル $V_{2n+3,2}/S^{2n+1}=S^{2n+2}$ の、写像

$\alpha : S^{2n+2p-1} \to S^{2n+2}$, $\{\alpha\} = \frac{1}{2}\alpha_1(2n+2) \in \pi_{2n+2p-1}(S^{2n+2}; p) \approx Z_p$, により誘導バンドルを $B_n(p)$ とする。バンドル $V_{2n+3,2}$ の characteristic class は $2\cdot\iota_{2n+1}$ であるから、(1.1)、(1.2) は明らか。(1.6) の f の存在は、Stiefel における同様の写像 $f_1 : S^2 V_{2n+3,2} \to V_{2n+5,2}$ の存在からわかる。f_1 は [3] における写像 $f_k : V_{m,k} * V_{n,k} \to V_{m+n,k}$ からつくれる。

(1.7) は次の補題 1 において $F = \Omega^2 S^{2n+3}$, $E = \Omega^2 B_{n+1}(p)$, $B = \Omega^2 S^{2n+2p+1}$, $F' = S^{2n+1}$, $E' = B_n(p)$, $B' = S^{2n+2p-1}$ とおいて得られる。

補題 1 (F, F'), (E, E'), (B, B') を CW 対、$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, $F' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} B'$ ともに fibering、$p|E' = p'$ とする。このとき右の図式はホモトピー可換で、各行・各列はいずれも fibering と equivalent である。

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^2(B, B') & \to & \Omega(F, F') & \to & \Omega(E, E') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega B' & \xrightarrow{\rho'} & F' & \xrightarrow{i'} & E' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega B & \xrightarrow{\rho} & F & \xrightarrow{i} & E
\end{array}$$

$(\Omega p)_* : \pi_i(\Omega(E, F)) \to \pi_i(\Omega B)$ は同型であり、Ωp はこの場合ホモトピー同値になる。そのホモトピー逆写像を使って

(2.1) $\rho : \Omega B \to \Omega(E, F) \to F$

をつくる。ρ' についても同様である。

Fibering $\Omega S^{2n+1} \to \Omega B_n(p) \to \Omega S^{2n+2p-1}$ に associate した Serre の spectral 系列は collapse し、$H^*(\Omega B_n(p) ; Z_p) \approx H^*(\Omega S^{2n+1} ; Z_p) \otimes H^*(\Omega S^{2n+2p-1} ; Z_p)$

(2.2) $H^*(\Omega S^{2n+1} ; Z_p) = \{a_0 = 1, a_1, a_2, \cdots\}$, $a_i \cdot a_j = \binom{i+j}{i} a_{i+j}$, $\deg a_i = 2ni$

$H^*(\Omega S^{2n+2p-1} ; Z_p) = \{b_0 = 1, b_1, b_2, \cdots\}$, $b_i \cdot b_j = \binom{i+j}{i} b_{i+j}$, $\deg b_i = (2n+2p-2)i$

をそれぞれの Z_p-basis とする。σ を cohomology suspension として、

補題2： $H^*(\Omega B_n(p);Z_p) = \{x_0=y_0=1,\ x_1, x_2, \cdots ;\ y_1, y_2, \cdots\}$, $\deg x_i = 2ni$, $\deg y_i = (2n+2p-2)i$ であり、non-zero 係数を無視して、

$$x_1 = \sigma u, \quad \mathscr{P}^{p^m} x_{pm} = y_{pm}, \quad \mathscr{P}^{i} x_{pm} = y_{pm} \quad (i > p^m)$$

が成り立つ。

証明は、$H^*(\Omega B_n(p), Z_p)$ のHopf algebra構造を考え、この primitive element が x_1, y_1 で生成される（[4] Prop. 3.12）ことを使い、$\mathscr{P}^{p^m}x_{pm} - y_{pm}$, $\mathscr{P}^{i}x_{pm}$ が primitive（従って $=0$ if $m>0$）であることを m に関する帰納法で示すが、又は homology ring $H_*(\Omega B_n(p);Z_p)$ においてdualな関係を示してもよい。$K_1 = S^{2n} \cup_{\alpha_1} e^{2n+2p-2}$, $Q(K_1) = \varinjlim_N \Omega^N S^N K_1$ とし、(1.6) の f から、$g: \Omega B_n(p) \to Q(K_1)$ で、g_* が $H_*(\ ;Z_p)$ の単射となるものをつくり、$H_*(Q(K_1);Z_p)$ の構造（[1]）と、$\mathscr{P}^{p^m}_*$ ($=$dual of $\mathscr{P}^{p^m}$) の作用（[5]）とから知られる。

§3. 定理の証明

(1.8),(1.9) における I', I は[8]によれば次の性質をもつ。

補題3 （[8] lemma 2.5） $2mp-h \geq 6$. $Y^{\ell}_p = S^{\ell-1} \cup_p e^{\ell}$ とする。写像 $G: Y_p^{2mp-h-2} \to \Omega^h Q_2^{2m-1}$ があって、G^* は $H^{2mp-h-3}(\ ;Z_p)$ の同

(3.1)
$$\begin{tikzcd}
\pi_i(S^{2mp-h-3};p) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dd, "x\cdot S^{h+2}"] & \pi_i(Y_p^{2mp-h-2};p) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "G_*"] & \pi_i(S^{2mp-h-2};p) \arrow[dd, "y\cdot S^{h+3}"] \\
 & \pi_i(\Omega^h Q_2^{2m-1};p) & \\
\pi_{i+h+2}(S^{2mp-1};p) \arrow[r, "I'"] & \pi_{i+h}(Q_2^{2m-1};p) \arrow[r, "I"] \arrow[u, "\approx"] & \pi_{i+h+3}(S^{2mp+1};p)
\end{tikzcd}$$

型であり、(3.1) は可換である。(for some $x, y \not\equiv 0 \pmod{p}$)

補題4：写像 $h_p: \Omega S^{2m+1} \to \Omega S^{2mp+1}$ があって、h_p^* は $H^{2mp}(\ ;Z_p)$ の同型であり、次の図式が可換になる。

(3.2)
$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(S^{2m+1};p) \arrow[r, "\Omega", "\approx"'] \arrow[dr, "H^{(2)}"'] & \pi_i(\Omega S^{2m+1};p) \arrow[r, "h_{p*}"] & \pi_i(\Omega S^{2mp+1};p) & \pi_{i+1}(S^{2mp+1};p) \arrow[l, "\Omega"', "\approx"] \\
 & \pi_{i-2}(Q_2^{2m-1};p) \arrow[urr, "I"'] & &
\end{tikzcd}$$

バンドル $B_n(p)$ の (2.1) の写像を $\rho_n: \Omega S^{2n+2p-1} \to S^{2n+1}$ とすると、$(\rho_n)_* \circ \Omega = \partial_n$ であり、(1.5) から $\rho_n = \Omega^2 \rho_{n+1}|_{\Omega S^{2n+2p-1}}$ が成りたつ。$Q_2(\rho_n): \Omega Q_2^{2n+2p-1} \approx \Omega(\Omega^3 S^{2n+2p+1}, \Omega S^{2n+2p-1}) \to \Omega(\Omega^2 S^{2n+3}, S^{2n+1}) = Q_2^{2n+1}$ が定義でき、$Q_2(\rho_n)_* \circ \Omega = \bar{\partial}_n$ となる。$g_1 = h_p \circ \Omega\rho_n: \Omega^2 S^{2n+2p-1} \to \Omega S^{2np+1}$ を homotopic にとりかえ、$g_2: (\Omega^2 S^{2n+2p-1}, S^{2n+2p-3}) \to (\Omega S^{2np+1}, *)$ をつくり、$g_3 = \Omega g_2: Q_2^{2n+2p-3} \to \Omega^2 S^{2np+1}$、$g_4 = \Omega g_3: \Omega Q_2^{2n+2p-3} \to \Omega^3 S^{2np+1}$ とする。$I \circ \bar{\partial}_{n-1} = \Omega^{-3} \circ g_{4*} \circ \Omega$、また $g_5: Y_p^{2np+2p(p-1)-2} \to S^{2np-1}$ で $g_3 \circ G \simeq i \circ g_5$、$i: S^{2np-1} \to \Omega^2 S^{2np+1}$ となるものがあり、従って $g: Y_p^{2np+2p(p-1)-3} \to Y_p^{2np-2}$ があって、次の図式がホモトピー可換になる。

(3.3)
$$\begin{tikzcd}
 & \Omega Q_2^{2n+2p-3} \arrow[rr, bend left, "g_4"] \arrow[r, "Q_2(\rho_{n-1})"] & Q_2^{2n-1} & \Omega^3 S^{2np+1} \\
S^{2np+2p(p-1)-4} \arrow[r, "i"] & Y_p^{2np+2p(p-1)-3} \arrow[u, "G"] \arrow[r, "g"] & Y_p^{2np-2} \arrow[u, "G"] \arrow[r, "\pi"] & S^{2np-2} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

[9] によれば、([9] の β_s をここでは $\beta_{(s)}$ とかく)

(3.4) $\{g\} = x\cdot\beta_{(1)} + y\cdot\alpha^{p}\delta + z\cdot\alpha^{p-1}\delta\alpha \qquad x, y, z \in Z_p$

とかけ, $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ から定理が従がう。そのためには $\pi\circ g$ の写像錐で $\mathcal{P}^1$ が non-trivial であればよく、これは $\Omega\rho_n$ の写像錐

で β^p が non-trivial であることからわかる。写像 $k : C\Omega P_n \to \Omega B_n(p)$ と補題2を使って、$C\Omega P_n$ での β^p の non-triviality がいえる。(3.4) の y, z が決まれば、残った (1.10) の場合も解決できる。

§4. ホモトピー群の計算

$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1};p)$ は[8]の Theorem 11.1, Theorem 15.1 および Theorem 15.2 により $k < 2(p^2+p)(p-1)-5$ の範囲で計算されており、ここでは、そこで使われている記号をそのまゝ使うこととする。

[8]の各生成元に対し ∂_n は次の通りである。($m = n+p-1$ とおく。)

(4.1) i) $\partial_n(\iota(2m+1)) = \alpha_1(2n+1)$

ii) $\partial_n(\alpha_r(2m+1)) = \begin{cases} \alpha_1\alpha_r(2n+1) & \left(\begin{array}{ll} n=1 & r \not\equiv 0 \pmod p \\ n=2 & r \equiv -1 \pmod p \\ n=3 & r = p^2-1 \end{array}\right. \\ 0 & \text{その他}.\ r \not\equiv 0 \pmod p \end{cases}$

iii) $\partial_n(\alpha'_{sp}(2m+1)) = \alpha_1\alpha'_{sp}(2n+1) \neq 0$ if $n=1$, $= 0$ if $n>1$

iv) $\partial_n(\beta_1^r\beta_s(2m+1)) = \begin{cases} \alpha_1\beta_1^r\beta_s(2n+1) & \text{下の場合以外}.\ r \geq 0.\ 1 \leq s < p \\ 0 & r = p-1,\ s=1,\ n > p^2-3 \text{ のとき} \end{cases}$

v) $\partial_n(\alpha_1\beta_1^r\beta_s(2m+1)) = \alpha_1^2\beta_1^r\beta_s(2n+1) \neq 0$ if $n=1$, $= 0$ if $n>1$.

vi) $\partial_n(\varepsilon'_i(2m+1)) = \beta_1^{p+1}(2n+1)$ if $p=3$, $= 0$ if $p>3$

vii) $\partial_n(\varepsilon'_i(2m+1)) = 0$ $\quad 1 < i < p-1$

viii) $\partial_n(\varepsilon_j(2m+1)) = \varepsilon_{j+1}(2n+1)$ $\quad 1 \leq j < p-2$

ix) $\partial_n(\varepsilon_{p-2}(2m+1)) = 0$

(4.2) i) $\partial_n(p_*\bar{Q}^{m+1}(\alpha_{r-m-1})) = 0$ $\quad n < r-p$. $r \not\equiv 0 \pmod p$

ii) $\partial_n(p_*\bar{Q}^{m+1}(\iota)) = p_*\bar{Q}^{n+1}(\beta_1)$ $\quad n = r-p$ $\quad r \not\equiv 0 \pmod p$

iii) $\partial_n(p_*\bar{Q}^{m+1}(\beta_1^r\beta_s)) = p_*\bar{Q}^{n+1}(\beta_1^{r+1}\beta_s)$ $\quad n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$

iv) $\partial_n(p_*\bar{Q}^{m+1}(\beta_1^r\beta_s)) = 0$

(4.3) i) $\partial_n(\gamma_s(2m+1)) = 0$ $\quad n < (s-1)p-1,\ s \leq p$ 又は $n=(s-1)p-1,\ s=2, p$

ii) $\partial_n(\gamma_s(2m+1)) = S^{2p-2}u_4(s-2, \beta_2)$ $\quad n=(s-1)p-1,\ 3 \leq s < p$

iii). $\partial_n(S^2\gamma_s(2sp-3)) = \begin{cases} 0 & s=2, p \quad n=(s-1)p \\ S^{2p}u_4(s-2, \beta_2). & 3 \leq s < p \quad n=(s-1)p \end{cases}$

(4.4) i) $\partial_n(S^{2j}u_3(l, \beta_1^r\beta_s)) = S^{2j}\bar{u}_3(l-1, \beta_1^{r+1}\beta_s)$

ii) $\partial_n(S^{2j}\bar{u}_3(l, \beta_1^r\beta_s)) = 0$

(4.5) i) $\partial_n(S^{2j}u_4(l, \beta_s)) = S^{2j}\bar{u}_3(l-1, \beta_1\beta_s)$ $\quad 0 \leq j \leq p-2$

ii) $\partial_n(S^{2j}u_4(l, \beta_s)) = 0$ $\quad j = p-1, p$

これらの内、(4.2) i) で $n=(l+1)p$, $r=(s+l)p+s-2$, $s>2$, $s+l<p$ のときは (1.4), (1.5), (1.7), (1.9) だけでは決まらない。この場合 ∂_n-image として $S^{2p}u_4(l, \beta_s)=p_*\bar{Q}^{m+1}(\beta_{s-1})$ が可能性があり、$\partial_n(p_*\bar{Q}^{m+1}(\alpha_{(s-2)(p+1)})) = x_1\cdot p_*\bar{Q}^{n+1}(\beta_{s-1})$ とおくと、$\bar{\partial}_n(\bar{Q}^{m+1}(\alpha_{(s-2)(p+1)})) = x_1\bar{Q}^{n+1}(\beta_{s-1})$。すると、Moore空間の stable ホモトピー環で $\{g\}\circ\alpha^{(s-2)(p+1)} = x_1\cdot\beta_{(s-1)}$ となり $\beta_{(s-1)}$ の一次独立性により $x_1=0$ を得る。([9]).

$K = S^{2n+1} \cup_{\alpha_1} e^{2n+2p-1}$, $i_1 : K \to B_n(p)$ inclusion とする。n が i にくらべ十分大なら $i_{1*} : \pi_i(K) \to \pi_i(B_n(p))$ は同型である。

補題5：n を i_{1*} が同型となるよう大きくとる。$\gamma \in \pi_{2n+2p-3+k}(S^{2n+2p-3}; p)$, $\partial_n(S^2\gamma) = \alpha_1(2n+1)\circ S\gamma = 0$、order of $S\gamma = p^t$ $t \geq 1$、$\tilde{\gamma} \in \pi_{2n+2p-1+k}(K)$ を $S\gamma$ の1つの coextension とすると、$p^t\cdot\tilde{\gamma} \in i_{2*}\{\alpha_1(2n+1), S\gamma, p^t\iota_{2n+2p-2+k}\}$, $i_2 : S^{2n+1} \to K$ となる。

補題 6 : $h: Y_p^{k+l} \longrightarrow Y_p^l$, $\alpha \in \pi_i(Y_p^{k+l})$, order of $\alpha = p$, $h_*(\alpha) = 0$ とし、$\tilde{\alpha} \in \pi_{i+1}(Y_p^l \cup_h CY_p^{k+l})$, $\bar{\alpha} \in [Y_p^{i+1}, Y_p^{k+l}]$ をそれぞれ α の coextension, extension とする。すると $\gamma \in \pi_{i+1}(Y_p^l)$ で、$p \cdot \tilde{\alpha} = j_{1*}\gamma$, $\pi_1^*\gamma = -h_*\bar{\alpha}$ をみたすものが存在する。

$j_1 : Y_p^l \longrightarrow Y_p^l \cup_h CY_p^{k+l}$, $\pi_1 : Y_p^{i+1} \longrightarrow S^{i+1}$.

証明は両方とも secondary composition の性質を使う。補題5は stable な場合に、補題6は（h として (3.3) の g をとって）unstable な場合に、群の拡大を求めるために使われる。

最後に Classical group への応用として (1.11), (1.12) を証明しておく。$n < p$ とする。[7]にあるように写像 $f_n : S^{2n+1} \longrightarrow SU(n+1)$ で f_n^* が $H^{2n+1}(\ ;Z_p)$ の同型になるものがある。$\pi_{2n+2p-2}(SU(n+p)) = 0$ であるから $S^{2n+1} \xrightarrow{f_n} SU(n+1) \subset SU(n+p)$ は $g_n : K \longrightarrow SU(n+p)$ に拡張でき、g_n^* は $H^{2n+1}(\ ;Z_p)$, $H^{2n+2p-1}(\ ;Z_p)$ の同型である。[2]によれば、$\pi_{4n+2p-1}(SU(n+p);p) = 0$ 、そこで $\pi_{4n+2p-1}(SU(n+p))$ の位数を r とし（r は p と素）、$B_n'(p) = K \cup_{r\cdot\gamma} e^{4n+2p}$ とする。ただし、γ は $B_n(p)$ の $(4n+2p)$-cell の attaching map である。すると、g_n は $h_n : B_n'(p) \longrightarrow SU(n+p)$ に拡張でき、$h_1 \times h_2 \times \cdots \times h_n \times f_{n+1} \times \cdots \times f_{p-1}$: $B_1'(p) \times B_2'(p) \times \cdots \times B_n'(p) \times S^{2n+3} \times \cdots \times S^{2p-1} \longrightarrow SU(n+p)$ は $H^*(\ ;Z_p)$ の同型を導く。$k_n : B_n'(p) \longrightarrow B_n(p)$ で $H^*(\ ;Z_p)$ の同型を導くものがあるから (1.11) の C_p-同型がいえる。(1.12) についても全く同様である。

文献

[1] E. Dyer & K.K. Lashof : Homology of iterated loop spaces. Amer. J. Math. 84 (1962), 35 - 88.

[2] H. Imanishi : Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components). J. Math. Kyoto. Univ. 7 (1967) 221 - 243.

[3] I. M. James : The intrinsic join : A study of the homotopy groups of Stiefel manifolds. Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1958) 507 - 535

[4] J. W. Milnor & J. C. Moore : On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. 81 (1965) 211 - 264.

[5] G. Nishida : Cohomology operations in iterated loop spaces. Proc. Japan. Acad. 44 (1968) 104 - 109.

[6] H. Toda : On double suspension E^2. J. of Inst. Poly. Osaka City Univ. 7 (1956) 103 - 145.

[7] H. Toda : On homotopy groups of S^3-bundles over spheres. J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963) 193 - 207.

[8] H. Toda : On iterated suspensions. I, II, III. J. Math. Kyoto Univ. 5 (1965) 87 - 142, 5 (1966) 209 - 250, 8 (1968) 101 - 130.

[9] N. Yamamoto : Algebra of stable homotopy of Moore spaces. J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963) 45 - 67.