数理解析研究所講究録
50巻 1968年 21-35

多項式環上の $\mathcal{A}_2$ 構造について

山口大 文理　菅原民生

§1. Allowable sequences

Def　正数の増加列　$A=(i_1, i_2, \cdots, i_r)$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r$
を sequence という. sequence A に対して Z_2 上の多項式環

$$P_A = Z_2[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}], \quad \deg x_{i_j} = i_j$$

を考える.

$$D^1 = \{x \in P_A \mid \deg x > 0\}$$

として帰納的に　$D^n = D^{n-1} \cdot D^1$　を定義する;

P_A に mod 2 Steenrod algebra $\mathcal{A}_2$ が作用すれば その truncated algebra　$TP_A = P_A / D^3$　にも作用する.

Def　TP_A に $\mathcal{A}_2$ が作用するとき, A は allowable という.

Thomas は [1] で次の定理を証明した.

定理 (Thomas)

A を allowable とするとき　$n \in A$ について

$$\binom{n-t-1}{t} \equiv 1 \pmod 2$$

ならば　$n-t \in A$　で, さらに

$$Sq^t x_{n-t} \equiv x_n, \quad Sq^t x_n \equiv 0 \pmod{D^2}$$

が成り立つ.

Def. Aに関する定理の条件をT条件といい, T条件を満すsequenceをTsequenceという. nを含む最小のTsequenceをminimum sequenceといい, T_nで表わす.

Proposition 1

A, Bを二つのdisjointな sequencesで共にallowable (又はTsequences) とすればそのunion A+Bもallowable (又はTsequence) である.

証明 $\mathcal{A}_2$はCartan formulaによってHopf algebraであり, $TP_{A+B} \approx (TP_A \otimes TP_B)/D^3$ だから明らかである.

Def. Tsequence Aが二つのTsequencesのdisjoint unionにならないときirreducibleという.

Proposition 2.

$A=(i_1\, i_2 \cdots i_r)$ がallowable (又はTsequence) ならば $2A=(2i_1\ 2i_2\ \cdots\ 2i_r)$, $\frac{A}{2}=\{$Aから奇数を除き, 偶数を半分にしたsequence$\}$ もallowable (又はTsequence) である.

証明 $\varphi : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_2$, $\varphi(Sq^{2i+1})=0$, $\varphi(Sq^{2i})=Sq^{i}$ はAdem relationと両立してalgebra homoとなることからallowableのcaseがわかる. またTsequenceについても $\binom{n-t-1}{t} \equiv \binom{2n-2t-1}{2t} \pmod 2$ から明らかである.

Def. T-sequence A が奇数を含むとき simple という.

Def $A=(1)$, 又は $A=(2\sim n)$ を simple classical といい, simple classical sequence の 2^t 倍を単に classical という.

Def simple allowable sequence で classical でないものを simple exceptional といい, simple exceptional sequence の 2^t 倍を単に exceptional という.

Classical sequences は $H^*(BO(1), Z_2)$, $H^*(BSO(n), Z_2)$ と Proposition 2 によって allowable である. 従ってここでは simple exceptional sequences をすべて求めることが当面の目標である.

§2

定理 1

A を allowable とする. このとき $t \geqq 2$ に対して

$$2^t+1,\ 2n \in A \quad \text{ここに } 2^t+2 \leqq 2n \leqq 2^{t+1}+2,\ 2n \neq 2^{t+1}$$

ならば $2n-1 \in A$.

この定理と Proposition 2 からただちに次の系を得る.

系

A を allowable とする. $t>s>0$ なる t と s に対して

$2^t+2^{s-1},\ 2^s m \in A,\ 2^t+2^s \leqq 2^s m \leqq 2^{t+1}+2^s,\ 2m \neq 2^{t+1}$
ならば $2^s m - 2^{s-1} \in A$.

定理1の証明のため．Lemma をいくつか用意する．以下すべて mod D^3 で，すなわち TP_A において考えよう．

Lemma 1.

$$Sq^n D^2_{n+1} = 0$$

証明．$^\forall x_k x_{n-k+1} \in D^2_{n+1}$ に対して

$$Sq^n(x_k x_{n-k+1}) = \sum_{i=0}^{n} Sq^i x_k \cdot Sq^{n-i} x_{n-k+1}$$
$$= Sq^k x_k \cdot Sq^{n-k} x_{n-k+1} + Sq^{k-1} x_k \cdot Sq^{n-k+1} x_{n-k+1}$$
$$= x_k^2 \cdot Sq^{n-k} x_{n-k+1} + Sq^{k-1} x_k\, x_{n-k+1}^2 = 0$$

系

$$a \neq b,\ Sq^a x_{b+1} \in D^2 \quad ならば \quad Sq^{2a} Sq^b x_{b+1} = 0$$

証明 $a > b$ のときは明らかに $Sq^{2a} Sq^b x_{b+1} = 0$．$a < b$ のときは，$Sq^{2a} Sq^b x_{b+1} = \sum_{j=0}^{a} \binom{b-1-j}{2a-2j} Sq^{2a+b-j} Sq^j x_{b+j} = Sq^{a+b} Sq^a x_{b+1}$.
Lemma 1 から $Sq^{2a} Sq^b x_{b+1} = 0$.

Lemma 2.

$$\binom{b}{a} \equiv 0 \pmod 2 \quad ならば \quad Sq^{2a} Sq^b x_{b+1} = 0$$

証明．$a \neq b$ で Thomas の定理から $Sq^a x_{b+1} \in D^2$．よって Lemma 1 の系より明らか!

$k \in A$ に対して $\{x_i \mid i \geqq k\}$ で生成される TP_A の ideal を R_k で表わす．

Lemma 3

A を allowable とする.

$$2^t+1 \in A,\ 2^{t-1}+1 \leqq n \leqq 2^t,\ 2n+1 \notin A$$

ならば, $Sq^n x_{n+1} \equiv \sum_{i=0}^{2^t-n} x_{n-i}\, x_{n+1+i} \pmod{R_{2^t+2}}$.

証明. 以下すべて mod R_{2^t+2} とする.

$$Sq^n x_{n+1} = \sum_{i=0}^{2^t-n} a_i\, x_{n-i}\, x_{n+1+i}$$

とおく.

1) n が偶数の時

$$x_{n+1}^2 = Sq^1 Sq^n x_{n+1} = a_0 x_{n+1}^2 + \sum_{j=1}^{2^{t-1}-\frac{n}{2}} (a_{2j-1} + a_{2j})\, x_{n-2j+1}\, x_{n+2j+1}$$

だから $a_0 = 1$, $a_{2j-1} = a_{2j}$ $(j = 1, 2, \cdots 2^{t-1} - \frac{n}{2})$ を得る.

$$Sq^2 Sq^n x_{n+1} = \binom{n-1}{2} Sq^{n+2} x_{n+1} + Sq^{n+1} Sq^1 x_{n+1} = 0$$

1-1) $n \equiv 0 \pmod 4$ の時.

$$0 = Sq^2 Sq^n x_{n+1} = (1 + a_1)\, x_{n+1} x_{n+2}$$
$$+ \sum (a_{4j+2} + a_{4j+4})\, x_{n-4j-2}\, x_{n+4j+5} + (a_{4j+3} + a_{4j+5})\, x_{n-4j-3}\, x_{n+4j+6}$$

よって $1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^t-n}$ を得る.

(1-2) $n \equiv 2 \pmod 4$ の時.

$$0 = Sq^2 Sq^n x_{n+1}$$
$$= \sum (a_{4j} + a_{4j+2})\, x_{n-4j}\, x_{n+3+4j} + (a_{4j+1} + a_{4j+3})\, x_{n-1-4j}\, x_{n+4j+4}$$

この場合も同様に $1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^t-n}$ を得る.

2) n が奇数の時

$\binom{2n+1-1}{2} \equiv \binom{n}{1} \equiv 1$ (2) だから $2n-1 \notin A$ ならば $2n-3 \notin A$

である．1) の場合によって

$$S_q^{n+1}x_{n+2} \equiv \sum_{i=0}^{2^t-1-n} x_{n+1-i}x_{n+2+i} \quad (\mathrm{mod}\ K_{2^t+2}).$$

$$0 = S_q^1 S_q^n x_{n+1} = \sum_{j=0}^{2^{t-1}-\frac{n+1}{2}} (a_{2j}+a_{2j+1})x_{n-2j}x_{n+2+2j}$$

が成り立つので，$a_{2j} \equiv a_{2j+1}$ (2) を得る．

$$S_q^{n+1}x_{n+2} = S_q^{n+1}S_q^1 x_{n+1} = S_q^2 S_q^n x_{n+1} + \binom{n-1}{2} S_q^{n+2} x_{n+1}$$
$$= S_q^2 S_q^n x_{n+1}$$

2-1) $n \equiv 1$ (mod 4) の時.

$$S_q^{n+1}x_{n+2} = S_q^2 S_q^n x_{n+1}$$
$$= \sum a_{4j+1}(x_{n-1-4j}x_{n+4+4j} + x_{n+1-4j}x_{n+2+4j})$$
$$+ \sum a_{4j+2}(x_{n-2-4j}x_{n+5+4j} + x_{n-4j}x_{n+3+4j})$$

よって $1 = a_0 = a_2 = \cdots = a_{2^t-n}$ を得る.

2-2) $n \equiv 3$ (mod 4) の時.

$$S_q^{n+1}x_{n+2} = S_q^2 S_q^n x_{n+1}$$
$$= \sum a_{4j}(x_{n-4j}x_{n+3+4j} + x_{n+2-4j}x_{n+1+4j})$$
$$+ \sum a_{4j+3}(x_{n-3-4j}x_{n+6+4j} + x_{n-1-4j}x_{n+4+4j})$$

よって $1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^t-n}$ を得る. q.e.d.

定理 1 の証明

1) $2n = 2^t+2$ ならば明らか!

2) $2n = 2^{t+1}+2$ のとき．$2^t = s$ とおき $2s+1$ を A と仮定する.

$$S_q^s x_{s+1} = \sum_{j\geq 0} a_j x_{s-j}x_{s+1+j}$$

とおく．

$$x_{s+1}^2 = Sq^1 Sq^s x_{s+1} = \sum_{j\ge 0} a_j\, Sq^1(x_{s-j}\,x_{s+1+j})$$
$$\equiv a_0 x_{s+1}^2 \pmod{R_{s+3}}.$$

これから $a_0\equiv 1\ (2)$ を得る.

$$0 = (Sq^{s+2} + Sq^{s+1}Sq^1)x_{s+1} = Sq^2 Sq^s x_{s+1}$$
$$\equiv \sum_{j\ge 0} a_j\, Sq^2(x_{s-j}\,x_{s+1+j})$$
$$\equiv (a_0+a_1)\,x_{s+2}\,x_{s+1} \pmod{R_{s+3}}$$

これから $a_0\equiv a_1\equiv 1\ (2)$ を得る.

$$Sq^s Sq^s x_{s+1} = Sq^{s+\frac{s}{2}} Sq^{\frac{s}{2}} x_{s+1} + \sum * \, Sq^{2s-i} Sq^i x_{s+1} = 0$$

ここで第一項は Lemma 1 と $\binom{s}{\frac{s}{2}}\equiv 0\ (2)$ によって, 第二項は $2s-i > i+s+1$ によってそれぞれ 0 になる.

他方
$$Sq^s Sq^s x_{s+1} = \sum_{j=0}^{s-2} a_j\, Sq^s(x_{s-j}\,x_{s+1+j})$$
$$= \sum_{j\ge 0} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{s} Sq^{s-i} x_{s-j}\cdot Sq^i x_{s+1+j} \right\}$$
$$= \sum_{j\ge 0} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{s} \binom{s-j-1}{s-i}\binom{s+j}{i}\, x_{2s-i-j}\, x_{s+1+j+i} \right\}$$

ここで $i<s$ とすると $\binom{s+j}{i}\equiv 1\ (2)$ から $i<j$, そのとき $\binom{s-j-1}{s-i}\equiv 0\ (2)$.

よって $i=s$ の項のみが残り
$$= \sum_{j\ge 0} a_j\, x_{2^t-j}\, x_{2s+1+j}.$$
$$0 = Sq^s Sq^s x_{s+1} \equiv a_1 x_{s-1}\, x_{2s+2} \pmod{R_{2s+3}}.$$

これは矛盾である. よって $2s-1\in A$.

3) $2^t+4 \le 2n \le 2^{t+1}-2$ の場合.

ここでも $2^t = s$ とする. $2n-1\notin A$ と仮定すると Lemma 3 から

$$Sq^{n-1} x_n \equiv \sum_{j=0}^{s+1-n} x_{n-1-j}\, x_{n+j} \pmod{R_{s+2}}.$$

$S_q^{2n-s} S_q^{n-1} x_n$ について考えると，

$$\binom{n-1}{n-\frac{s}{2}} \equiv \binom{n-1}{\frac{s}{2}-1} \equiv 1 \ (2) \iff n \equiv \frac{s}{2} \ (\mathrm{mod}\ s)$$

であり，今条件から右辺が成り立たないので $\binom{n-1}{n-\frac{s}{2}} \equiv 0 \ (2)$ であって，Lemma 2 から $S_q^{2n-s} S_q^{n-1} x_n = 0$ である．

他方，$k = 2n-s$ とおいて $S_q^k\left(\sum_{j=0}^{s+1-n} x_{n-1-j}\, x_{n+j}\right)$ の $x_{k-1} x_{s+k}$ の項は $i = j+k-n$ として，$S_q^k\left(\sum_{i\geq 0} x_{k-i-1} x_{s+i}\right)$ について調べればよく，

$$S_q^i x_{k-i-1} \cdot S_q^{k-i} x_{s+i} = \binom{k-i-2}{i}\binom{s+i-1}{k-i} x_{k-1} x_{k+s}.$$

今 $i>0$ とすると $k-i<2^t$ だから

$$\binom{k-i-2}{i}\binom{s+i-1}{k-i} \equiv \binom{k-i-2}{i}\binom{i-1}{k-i} \quad (\mathrm{mod}\ 2)$$

ところが $k \geqq 2i$ ならば $k-i \geqq i > i-1$ で $\binom{i-1}{k-i} \equiv 0 \ (2)$．

他方 $k \leqq 2i-1$ ならば $k-i-2 \leqq i-3 < i$ で $\binom{k-i-2}{i} \equiv 0 \ (2)$

よって $i=0$ の時だけが残って

$$0 = S_q^k S_q^{n-1} x_n = x_{k-1} x_{2n} + \text{other terms}$$

となって矛盾．よって $2n-1 \in A$. q.e.d.

定理2

A は allowable, irreducible とする．

このとき $2 \in A$ ならば A は simple classical である．

証明 $t = \max\{t' \mid 2^{t'}+1 \in A\}$ とし，$m_0 = \max\{m \in A \mid 2^t+1 \leqq m < 2^{t+1}\}$ とすると，定理1 から $(2 \sim m_0) \subset A$ である．

$2^{t+1} < n < 2^{t+1} + 2^t$ なる n が存在すると仮定し，その最小のものを n_0 とする．

$$n_0 = 2^{t+1} + 2^s(2a+1), \quad 0 \leqq s < t$$

とおくと，

$$\binom{2^{t+1}+2^s(2a+1)-2^s-1}{2^s} \equiv \binom{2^{s+1}-1}{2^s} \equiv 1 \pmod 2$$

であるから $2^{t+1} + 2^{s+1}a = n_0 - 2^s \in A$．$n_0$ の最小性から

$a = 0$ で $n_0 = 2^{t+1} + 2^s$． t の最大性から $0 < s < t$ である．

次に $\binom{2^{t+1}+2^s-2^{s+1}-1}{2^{s+1}} \equiv \binom{2^{s+1}+2^s-1}{2^{s+1}} \equiv 1 \ (2)$ だから

$2^{t+1} - 2^s = 2^{t+1} + 2^s - 2^{s+1} \in A$． m_0 の最大性から

$$m_0 \geqq 2^{t+1} - 2^s \geqq 2^t + 2^{s-1}.$$

よって $2^t + 2^{s-1} \in A$．

他方，$2^{t+1} + 2^s \in A$ だから定理1の系から $2^{t+1} + 2^{s-1} \in A$．

これは n_0 の最小性に反する．よって上の n は存在しない．

従って $B = A - (2 \sim m_0) \neq \phi$ とすれば $B \ni n$ は

$n = 2^{t+1}$ か $n \geqq 2^{t+1} + 2^t$ である．今 $n = 2^{t+1}$ とすると

$\binom{n-k-1}{k} \equiv 1 \ (2)$ ならば $k = 0$ で $n = n-k \in B$ である．

また $n \geqq 2^{t+1} + 2^t$ として $n-k \notin B$ と仮定すると $n-k \in (2 \sim m_0)$，すなわち $m_0 \geqq n-k$， よって $k \geqq 2^{t+1} + 2^t - m_0 > 2^t$．

$\binom{n-k-1}{k} \equiv 1 \ (2)$ と仮定し，$k = 2^t b + b'$，$0 \leqq b' < 2^t$，$0 < b$

とすると，

$$\binom{n-k-1}{k} \equiv \binom{n-k-1}{2^t b + b'} \equiv \binom{n-k-1}{2^t b}\binom{n-k-1}{b'} \pmod 2$$

だから $\binom{n-k-1}{2^t b} \equiv 1\ (2)$ である.

$b > 1$ とすると $2^t b \geqq 2^{t+1} > m_0 \geqq n-k-1$ で矛盾.

$b = 1$ とすると

$$\binom{n-b'-1}{b'} \equiv \binom{n-k+2^t-1}{b'} \equiv \binom{n-k-1}{b'} \equiv 1\ (2)$$

だから $n-k+2^t \in A$ で $n-k+2^t \leqq m_0+2^t < 2^{t+1}+2^t$.

他方, $n-k+2^t = n-b' \geqq 2^{t+1}+2^t-b' > 2^{t+1}$ で矛盾.

以上で $n \in B$, $\binom{n-k-1}{k} \equiv 1\ (2)$ ならば $n-k \in B$ で

B は T sequence となるが, A は irreducible だから $B = \phi$.

よって $A = (2 \sim m_0)$. q. e. d.

次の Proposition が成り立つ.

Proposition 3

A を allowable とする. このとき

$2^t-1,\ 2^t+2 \in A,\ 2^t+1 \notin A$ ならば $2^{t+1}-3,\ 2^{t+1}-1 \in A$.

証明 $2^t = s$ とおき, $s-1,\ s+2 \in A$, $s+1,\ 2s-3 \notin A$ と仮定する.

$$Sq^{s-2} x_{s-1} = \sum_{j=0}^{s-4} a_j\, x_{s-2-j}\, x_{s-1+j}$$

とおく.

$$x_{s-1}^2 = Sq^1 Sq^{s-2} x_{s-1} = a_0 x_{s-1}^2 + \cdots\cdots$$

から $a_0 \equiv 1\ (2)$ を得る.

$$Sq^4 Sq^{s-2} x_{s-1} = \binom{s-3}{4} Sq^{s+2} x_{s-1} + Sq^s Sq^2 x_{s-1} = 0$$

ここで第二項は $Sq^2 x_{s-1} \in D^2$ と Lemma 1 による.

他方 $$S_q^4 S_q^2 x_{s-1} = \sum_{j=0}^{s-4} a_j\, S_q^4(x_{s-2-j} x_{s-1+j})$$
$$= a_0(x_{s+2}x_{s-1} + x_{s-2}x_{s+3}) + \cdots\cdot$$
これから $a_0 \equiv 0\ (2)$ となり矛盾. よって $2s-3 \in A$.

次に $\binom{s+\frac{s}{2}-2}{\frac{s}{2}-2} \equiv 1\ (2)$ だから Thomas の定理によって $2s-3 \in A$ から $s+\frac{s}{2}-1 \in A$ である.

そこで $2s-1 \notin A$ と仮定する.
$$S_q^{s-1} x_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j\, x_{s-1-j} x_{s+j}$$
とおく.
$$S_q^2 S_q^{s-1} x_s = \binom{s-2}{2} S_q^{s+1} x_s + S_q^s S_q^1 x_s = 0$$
ここで第二項 $=0$ は. $S_q^1 x_s \in D^2$ と Lemma 1 による.

他方 $$S_q^2 S_q^{s-1} x_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j\, S_q^2(x_{s-1-j} x_{s+j})$$
$$= b_0 x_{s-1} x_{s+2} + \cdots\cdot$$
これから $b_0 \equiv 0\ (2)$ を得る.

$\binom{s-1}{\frac{s}{2}-1} \equiv 1\ (2)$ から Thomas の定理によって
$$S_q^{\frac{s}{2}-1} x_s \equiv x_{s+\frac{s}{2}-1} \pmod{D^2}.$$
であって,
$$S_q^{s-1} S_q^{s-1} x_s = S_q^{s+\frac{s}{2}-1} S_q^{\frac{s}{2}-1} x_s + \sum \binom{s-2-i}{s-1-2i} S_q^{2s-2-i} S_q^i x_s$$
$$= S_q^{s+\frac{s}{2}-1}(x_{s+\frac{s}{2}-1} + \cdots) = x^2_{s+\frac{s}{2}-1}.$$
他方 $S_q^{s-1} S_q^{s-1} x_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j\, S_q^{s-1}(x_{s-1-j} x_{s+j})$ において
$$S_q^{s-1-i} x_{s-1-j} \cdot S_q^i x_{s+j} = \binom{s-2-j}{s-1-i}\binom{s+j-1}{i} x_{2s-2-i-j} x_{s+j+i}$$
$j>0$ とすると $\binom{s-1-j}{i} \equiv 1\ (2)$ から $i \leqq j$. そのとき $\binom{s-2-j}{s-1-i} \equiv 0\ (2)$

よって $j=0$ の項のみが残り,

$$S_q^{s-1}S_q^{s-1}x_s = b_0 \sum_i S_q^{s-1-i}x_{s-1} \bullet S_q^i x_{s+j} = 0$$

これは矛盾. よって $2s-1 \in A$ となる.

Proposition 4

A を allowable とする.

1) $10,\ 15 \in A$ ならば 11 又は $18 \in A$

2) $13,\ 20 \in A$ ならば 17 又は $25 \in A$

3) $15,\ 20 \in A$ ならば 18 又は $27 \in A$

証明のポイントのみを示そう.

1) $11,\ 18 \notin A$ と仮定する.

$$S_q^8 x_{10} = a x_8 x_{10} + b x_6 x_{12} + c x_4 x_{14}$$

とおくと,

$$x_{10}^2 = S_q^{10}x_{10} + S_q^9 S_q^1 x_{10} = S_q^2 S_q^8 x_{10}$$
$$= a x_{10}^2 + b x_6 x_{14} + c x_6 x_{14}$$

よって $a=1,\ b=c$ を得る.

$$0 = S_q^2 S_q^7 x_{10} + S_q^8 S_q^1 x_{10} = S_q^9 x_{10}$$
$$= S_q^1 S_q^8 x_{10} = c x_4 x_{15}$$

から $c=0$. ところが $S_q^{10} D_{12}^2 = 0$ だから

$$0 = S_q^{12}x_{10} + S_q^{11}S_q^1 x_{10} + S_q^{10}S_q^2 x_{10} = S_q^4 S_q^8 x_{10}$$
$$= a x_{10}x_{12} + b x_{10}x_{12}.$$

これから $1 = a = b = c = 0$ で矛盾.

2) 17, 25 を A と仮定する．

$S_q^{12} x_{13} = a x_{12} x_{13} + \cdots$ とおく．

$x_{13}^2 = S_q^1 S_q^{12} x_{13} = a x_{13}^2 + \cdots$ から $a = 1$

$0 = S_q^{20} x_{13} + S_q^{16} S_q^4 x_{13} = S_q^8 S_q^{12} x_{13} = a x_{20} x_{13} + \cdots$, 矛盾．

3) 18, 27 を A と仮定する．

$S_q^{13} x_{14} = a x_{12} x_{15} + \cdots$ とおく．

$x_{15}^2 = S_q^1 S_q^{14} S_q^1 x_{14} = S_q^1 S_q^2 S_q^{13} x_{14} = a x_{15}^2 + \cdots$ から $a = 1$

$0 = S_q^{21} x_{14} + S_q^{17} S_q^4 x_{14} = S_q^8 S_q^{13} x_{14} = a x_{20} x_{15} + \cdots$, 矛盾．

以上の結果を適用すると，最高次元 ≦ 31 の *simple exceptional sequences* は次のうちに含まれる：

4, 6, 7

4, 6, 7, 8, 10 ～ 15

4 6 7 8 10 ～ 16 18 ～ 31

4 6 8 10 12 14 15 16 18 20 22 23 24 26 ～ 31

4, 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 31

8 12 14 15

8 12 14 15 16 20 22 23 24 26 27 28 30

8 12 14 15 16 20 22 23 24 26 ～ 30

8 12 14 16 20 22 24 26 28 30 31

8 12 14 15 16 20 22 23 24 26 27 28 30 31

8 12 14 15 16 20 22 23 24 26 ～ 31

8, 12 16 20 24 28 30 31

16 24 28 30 31.

§3. exceptional sequences の例

$$P_n = H^*(BSO(n), Z_2) = Z_2[w_2\, w_3 \cdots w_n]$$

における $\mathcal{A}_2$ 構造は,

$$Sq^j w_i = \sum_{t=0}^{j} \binom{i-j+t-1}{t} w_{j-t}\, w_{i+t}$$

で与えられる.

P_n に含まれる $\mathcal{A}_2$ で閉じた ideal I について

$$P_n/I \approx Z_2[x_{i_1} \cdots x_{i_r}]$$

となれば sequence $A = (i_1, \cdots, i_r)$ は allowable である.

$P_{2^{t+1}-1}$ の中で, $w_2, w_4, \cdots w_{2^{t-1}}$ で積と $\mathcal{A}_2$ の作用とで生成された ideal を I とすると,

$$P_{2^{t+1}-1}/I = P_A, \quad A = (2^{t+1}-2^t,\ 2^{t+1}-2^{t-1}, \cdots 2^{t+1}-2,\ 2^t-1)$$

が得られ, この A は simple exceptional である.

また $P_{2^{t+1}+1}$ の中で,

$$x_2 = w_2, \quad x_{2^k+1} = Sq^{2^{k-1}} Sq^{2^{k-2}} \cdots Sq^2 Sq^1 x_2 \qquad k \geqq 1$$

として, $\{x_i \mid i = 2^k+1,\ k \geqq 0\}$ で生成される ideal を I とすると

$$P_{2^{t+1}+1}/I = P_A, \quad A = (2 \sim 2^{t+1}+1) - (2, 3 \cdots 2^k+1 \cdots 2^{t+1}+1)$$

が得られる.

$$A = (A - 2^{t+1}) + (2^{t+1})$$

だからAは reducible である.

今 $P_A - x_{2^{t+1}}$ を考えると、$x_{2^{t+1}}$ はどの Sq^i-image にも入っていないからこれはやはり a_2 の作用する Z_2-algebra である. $P_A - x_{2^{t+1}}$ の中で、$x_{2^{t+1}}$ の含まれる多項式よりなる ideal を I' とすると I' は a_2 で閉じており

$$P_A - x_{2^{t+1}}/I' = P_B. \qquad B = (2 \sim 2^{t+1}-1) - (2, 3 \cdots 2^t+1)$$

が得られる. これも simple exceptional の例である.

文　献

[1] Thomas, E. Steenrod squares and H-spaces. II
Ann. of Math. Vol. 81 (1965).