数理解析研究所講究録
50巻 1968年 17-20

$Sp(2)$ に似た H-space について

京大 理　今西英器

Lie 群でない、有限次元 H-space として、S^7, $RP(7)$ が知られている。最近 Hilton-Roitberg は新しい例を見出したので、それについて報告したい。この例は、以下に見られる様に、代数的には殆んど区別のつかない、Lie 群と H-space の間隙を示すものとして興味深く思われる。

$(E_\alpha, P_\alpha, S^{n+1})$ を $\alpha \in \pi_n(S^3)$ を characteristic class とする、S^{n+1} 上の principal $S^3(=Sp(1))$-bundle, $\omega \in \pi_6(S^3)(\cong Z_{12})$ を Blakers-Massey の字像、とすると、$E_\omega = Sp(2)$ であるが、Hilton-Roitberg の結果は、

"$E_{7\omega} \not\simeq E_\omega$, $E_{7\omega}$ は H-space"

と言うのである。ここで $\simeq$ はホモトピー同値を表わす。これは、次の定理1.2.の系として出る。

定理1. $\alpha, \beta \in \pi_n(S^3)$, $E_\alpha \simeq E_\beta \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$　但し $n > 3$.

定理 2. $E_{\alpha\beta}$ を induced bundle とする。

$\beta = l\alpha$, $\dfrac{l(l-1)}{2}\omega \circ S^3\alpha = 0$

(S は suspension) ならば, $E_{\alpha\beta}$

は trivial, i.e. $E_{\alpha\beta} = E_\alpha \times S^3$

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha\beta} \arrow[r] \arrow[d] & E_\beta \arrow[d, "P_\beta"] \\ E_\alpha \arrow[r, "P_\alpha"] & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

定理 1 の証明.

$\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ を証明する。

$f: E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ を homotopy equivalence とする。E_α の fibre S^3_1 に対し, $f \simeq f'$ で $f'(S^3_1) \subset S^3_2$ ($= E_\beta$ のある fibre) となる f' がとれる。二つの対, (E_α, S^3_1), (E_β, S^3_2) の homotopy exact seq. を f'_* で結べば, $\Rightarrow$ は容易に証明される。

定理 2 の証明.

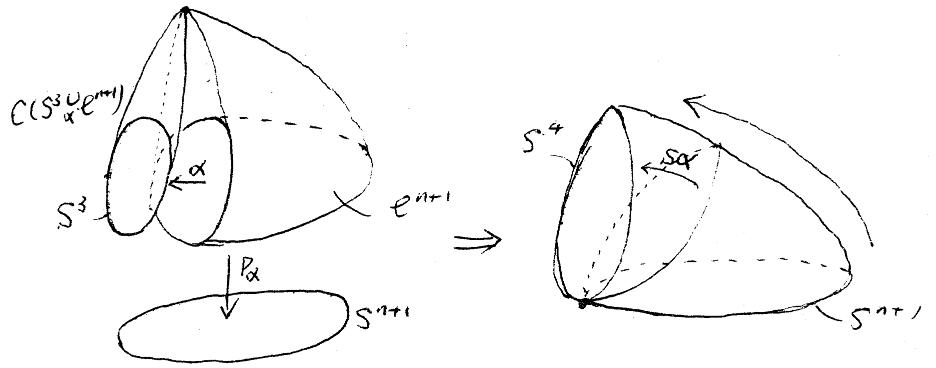
$f_\beta : S^{n+1} \longrightarrow B_{S^3}$ を E_β の classifying map とする。B_{S^3} は四元数射影空間 $HP(\infty)$ であり, セル構造は, $S^4 \cup_{\nu_4} e^8 \cup e^{12} \cdots$, $\nu_4 \in \pi_7(S^4)$ は Hopf-map となっている。証明すべき事は,

$f_\beta \circ P_\alpha \simeq 0 : E_\alpha \longrightarrow B_{S^3}$ である.

P_α の mapping cone $\simeq P_\alpha$ の Thom complex について, 次がなりたつ。

$$\begin{tikzcd} C_{P_\alpha} = S^{n+1} \cup_{P_\alpha} C(S^3 \cup_\alpha e^{n+1} \cup e^{n+4}) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & S^4 \cup_{J(\alpha)} e^{n+5} \\ S^{n+1} \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "S\alpha"] & S^4 \arrow[u, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

これは次の図（高次元セルは略した）より明らかである。



従って次の図式は可換となる。

$$
\begin{tikzcd}
{[S^{n+1} \cup_{p_\alpha} CE_\alpha, B_{S^3}]} \arrow[rr, "i_2^*"] \arrow[dd, "i_1^*"'] & & {[S^4, B_{S^3}]} \arrow[rr, "J(\alpha)^*"] \arrow[ddll, "(S\alpha)^*"'] \arrow[dd, "\Delta\,\cong"'] & & {[S^{n+4}, B_{S^3}]} \\
& & & \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \ell\iota_4}}{[S^4, S^4]} \arrow[ul, "i_*"'] \arrow[r, "J(\alpha)^*"] & {[S^{n+4}, S^4]} \arrow[u, "i_*"'] \\
\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ f_\beta}}{[S^{n+1}, B_{S^3}]} \arrow[d, "p_\alpha^*"'] \arrow[dr, "\Delta\,\cong"] & & \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \ell\iota_3}}{[S^3, S^3]} \arrow[ur, "S\,\cong"] \arrow[dl, "\alpha^*"'] & & \\
{[E_\alpha, B_{S^3}] \ni f_\beta \circ p_\alpha} & \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \beta = \ell\alpha}}{[S^n, S^3]} & & &
\end{tikzcd}
$$

ここで、上の行と、左の列は exact, Δ は universal S^3-bundle に関する boundary homo. $i: S^4 \longrightarrow B_{S^3}$ は自然な injection であり、記入した elements は、矢でつながっている。

この図式より、$i_* \circ J(\alpha)^*(\ell\iota_4) = 0$ が言えれば証明は終る。

$$J(\alpha) = J(\iota_3 \circ \alpha) = \nu_4 \circ S^4\alpha$$

$$\therefore\ J(\alpha)^*\ell\iota_4 = \ell\iota_4 \circ \nu_4 \circ S^4\alpha$$

$$= (\ell\nu_4 + \ell(\ell-1)/2\ [\iota_4, \iota_4] \circ H(\nu_4)) \circ S^4\alpha$$

$$= (l\nu_4 + l(l-1)/2 \cdot (2\nu_4 - S\omega)) \circ S^4\alpha$$

$$= (l^2\nu_4 - l(l-1)/2 \; S\omega) \circ S^4\alpha$$

ところが、B_{S^3}のセル構造より、$i_*(\nu_4) = 0$。従って、
$l(l-1)/2 \; \omega \circ S^3\alpha = 0$ なら、$i_* \circ J(\alpha)^* \, l\iota_4 = 0$　　（証終）

球面のホモトピー群の知られている結果によれば、αの order に比して、$\omega \circ S^3\alpha$ の order はかなり低くなっている。従って、定理２で更に $\alpha = k\beta$, $\frac{k(k-1)}{2}\omega \circ S^3\beta = 0$, $l \neq \pm 1$ となる $\alpha, \beta \in \pi_n(S^3)$ はかなりたくさん存在する。すると、$E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$（$=$は homeo, $\times$は diffeo）であるから、manifold E_α, E_β で $E_\alpha \not\approx E_\beta$ であって $E_\alpha \times S^3 = E_\beta \times S^3$ となる例が作れる。Hilton-Roitberg の例もこの場合であり、$\alpha = \omega$, $\beta = 7\alpha$（従って $\alpha = 7\beta$）としたものである。この時 $\omega \circ S^3\omega \in \pi_9(S^3) \cong Z_3$ であるから、上の場合にあてはまり、

$$E_{7\omega} \times S^3 = E_\omega \times S^3 = Sp(2) \times S^3$$

この右辺は H-space であるから $E_{7\omega}$ も H-space となる。

- $E_{7\omega}$ の性質（associative か？）
- この様な construction は一般化できるか？
- algebraic にこの様な space が見出せるか？

等が問題として残っている。