数理解析研究所講究録
51巻 1968年 63-72

工学における偏微分方程式の
応用例 [シミュレーション実験の例]

慶大 工学部 鬼頭史城

1. 緒言.

シミュレーションと模型実験と, どうちがうのか? そこに議論の余地はあると思われる。ここでは, 私が十数年以前から手がけてきたところの, 氷雪跳躍(sleet jump)の問題について, その理論と, 実験との概要を述べたいと思う。研究は現に継続中である。

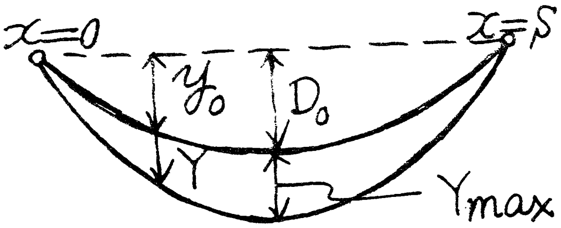
2. 氷雪跳躍(sleet jump)の問題.

送電線の電線にスリート(氷雪)が附着すると, その重量によって電線は弛度(sag)を増す。急にsleetが脱落すると, 電線は, ハネ上げられる。この「はねあがり」の高さを求める問題である。私共は, 実物や模型の送電線を使って, 大規模な実験を行なってきたが, 現在なお引続いて(電

力技術研究所などで）実験研究が行なわれている。一方において，理論的研究を行なった。

ここで，電線とは，曲げに抵抗しないところの，弾性のある「ひも」の1種とみなす。その実長は，張力 T の値により，弾性的伸びのために変わるものとする。

ここでは，$\boxed{\text{第1図}}$ に示すごとき，耐張型の場合だけを示す。



第1図

3. 記号. w＝電線の自重 (kg/m)，T＝電線の張力 (kg)，T_0＝弛度 D_0 のときの張力 (kg)，電線の断面積 (cm²)，E＝ヤング率 (kg/cm²)，L＝1径間の電線の長さ，t＝時刻 (sec)，S＝径間長 (m)，g＝9.80 (m/sec²)，y＝或る瞬間或る場所における電線の縦坐標 (m)，y_0＝静止のときの y の値，D_0＝静止のときの弛度の値 (m)，Y＝静止位置から測った y の変化部分［$y = y_0 + Y$］，

なお，便宜上，下記の諸係数を用いる。

$\xi = \frac{1}{2}kS$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \xi$, $Y_{max}/D_0 = \delta$,
$\delta = (H/D_0)(1-\cos\xi)$,
$Y = H[\sin(kx+\alpha) - \sin\alpha]$,
$k_1 = \frac{1}{2}[1 + 2\cos^2\xi - \frac{3}{\xi}\sin\xi\cos\xi]$,
$k_4 = \sqrt{g(8k_1D_0)}$, $\tau = k_4 t$,
$\omega = 2\xi\sqrt{g/(8D_0)}$, $C = \frac{w^2AE}{T_0^3 S}$, $C_K = \frac{w^2AE}{T_0^3}S^2$

初期條件 $t<0$ において スリート附着し,静止している。そして $D_0+Y_{max\,0}$ だけ垂れている。$t=0$ において,急にスリート脱落せるものとし,$0<t$ における電線の運動を求める。

4. 電線の振動の基礎方程式

張力 T で張られ,自重が w であるところの,電線の運動の方程式は(yは下向きを正とる)

$$-\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -w$$

である。略近的に,T は時刻 t のみの関数とする。静止のときには

$$y_0 = \frac{4}{S^2}D_0x(S-x)$$

そこで,$y = y_0 + Y$ とおくと,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{w}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}&=\frac{T-T_0}{T_0}w \\ T&=T_0+\frac{AE}{2S}\int_0^S\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2\right]dx \end{aligned}\right\} \quad \text{---- (1)}$$

方程式(1)は，Yについて非線形偏微分方程式であり，微分積分方程式の形をしている。

5．基礎方程式の線形化． $|Y|$は$|y_0|$に比して小さいときには，方程式(1)は近似的に

$$\left.\begin{aligned} -\frac{w}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+T_0\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}-\frac{8AED_0 w}{T_0 S^3}\int_0^S Y\,dx&=0, \\ T=T_0-\frac{8AED_0}{S^3}\int_0^S Y\,dx& \end{aligned}\right\} \quad \text{--- (2)}$$

となる。これは線形の微分積分方程式であるが，下記のような簡単な解をもっている。

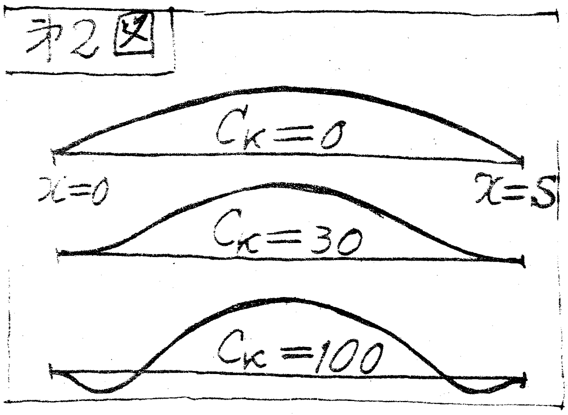
$$Y=H_0[\sin(kx+\alpha)+a]\cos kt, \quad \text{--- (3)}$$

$\frac{1}{2}kS=\xi$ とおくと，ξは方程式

$$\tan\xi=\frac{C_K-4\xi^2}{C_K}\xi \quad \text{---- (4)}$$

の根でなくてはならない。(3)の表わす波形は，係数C_Kによって支配されることがわかった。波形の例を 第2図 に示す。

6. 非線形問題の取扱い。



線形問題に suggest されて，非線形問題でも，近似的に

$$Y=H\left[\sin(kx+\alpha)+a\right] \qquad \text{------ (5)}$$

とおく。H は t の関数とする。基礎方程式 (1) の両辺に $\partial Y/\partial t$ をかけ，且つ $x=0$ から $x=S$ まで積分すれば

$$-\frac{w}{g}\int_0^S \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}dx+\int_0^S T\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}dx$$
$$=\int_0^S w\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\frac{\partial Y}{\partial x}dx \qquad \text{---- (6)}$$

となる。これに (5) を代入すると

$$-A_1\frac{dH}{dt}\frac{d^2H}{dt^2}+B_1TH\frac{dH}{dt}=wC_1\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\frac{dH}{dt} \qquad \text{---- (7)}$$

という非線形常微分方程式が得られる。ここで A_1, B_1, C_1 は定数であって，下記の値をもつ。

$$A_1=\int_0^S\left[\sin(kx+\alpha)+a\right]^2dx$$

$$B_1 = \int_0^S [\sin(kx+\alpha)+a][-k^2\sin(kx+\alpha)]\,dx$$
$$C_1 = \int_0^S [\sin(kx+\alpha)+a]\,dx$$

次ぎに，(1)の第2式に対しては，これに

$$y_0 = \frac{D_0}{S^2}4x(S-x)$$

と(5)の値とを代入すれば

$$T = T_0 + T_1 H + T_2 H^2 \qquad \text{------ (8)}$$

となる。ここで

$$T_1 = \frac{4AED_0}{S^3}k\int_0^S (S-2x)\cos(kx+\alpha)\,dx,$$
$$T_2 = \frac{AE}{2S}k^2\int_0^S \cos^2(kx+\alpha)\,dx$$

とおいてある。(7)と(8)とを組み合わせたものは，未知関数 $H(t)$ に対する非線形常微分方程式となる。既知方法によって近似解が求められる［文献(2)］。すなわち，下記の形に改められる。

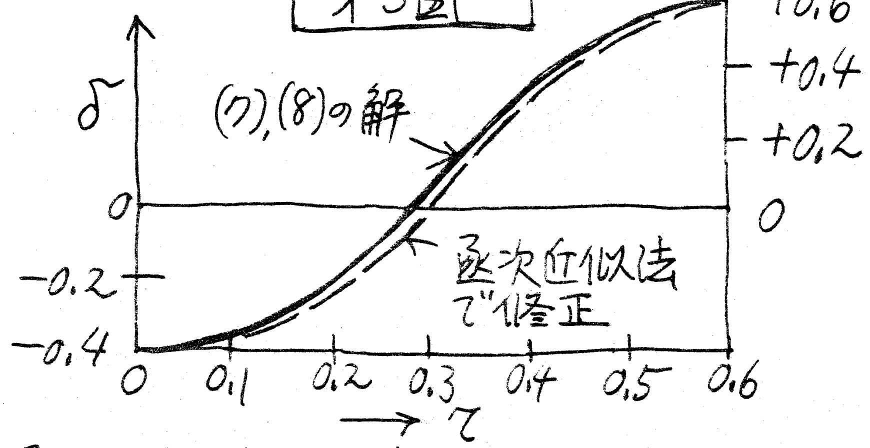
$$-\frac{1}{2}\frac{W}{g}k_1 L\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + F(H) = \text{Const.} \qquad \text{---- (9)}$$

7. 計算結果と今后の問題点。

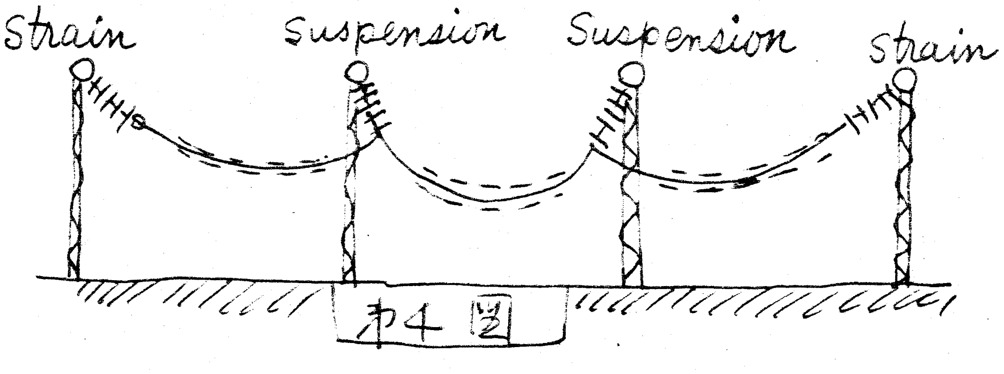
(9)の数値解を多数試みた。そもそも，

(5)の仮定をおき、且つ方程式(1)を方程式(6)でスリかえたことは、非常に粗雑である。しかし、多数の数値計算を行なつて、実験結果と比較してみると、両者可なりよく一致していることが認められた。　計算結果は、第3図のごときグラフに示される。

第3図



それにしても、(7),(8)の扱いだけでは十分でないので、更に、(7),(8)の解からスタートし、逐次畧近法(Picard)によつて修正値を求めてみた。



第4図

今后の課題としては，単独径間の場合だけに止めないで，連続径間の場合を調べてみたい。せめて，3径間の場合 $\boxed{\text{第十図}}$ なら，何とかなりはしないか，と思っている。

参考文献

(1). 鬼頭，スリート・ジャンプの理論的研究，「雪氷の研究」，1号，(雪氷学会)，昭28，11月

(2). J.J.Stoker, Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, 1950.

8. 実験方法.

題目：送電線における氷雪跳躍 (sleet jump

実物実験：(1) 猪苗代送電線，(2) 国鉄，武蔵境線

模型実験：(1) 大阪，牧方変電所構内 (木柱)，(2) 電力技術研究所構内 (鉄柱，継続中)

比較法則：

(1) 荷重率 (電線自重＋氷雪重量)÷(電線自重)

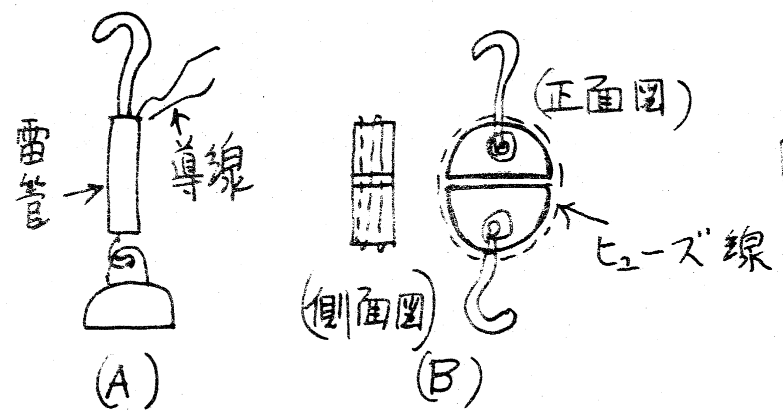
(ロ) 張線係数 $C_K = \frac{W^2 A E S^2}{T_0^3}$

(ハ) 径間数 1 (耐張の場合) 乃至 5.

発射方法:

(イ) 同時落下, (ロ) 段落落下

(A) 工業用雷管 (B) ヒューズ・コイル

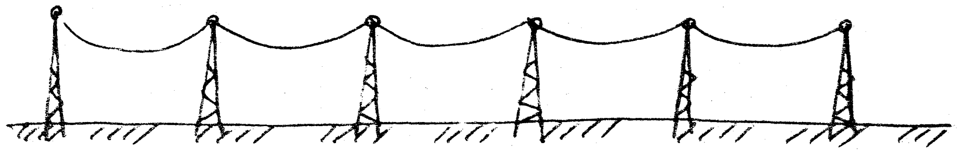


第5図

懸吊方法の区別:

(イ) 懸垂碍子 (suspension insulators)

(ロ) 耐張碍子 (strain insulators)



第6図