数理解析研究所講究録
51巻 1968年 37-44

Poisson方程式の数値計算

日本ビジネス・オートメーション(株)　角谷 保

§1. まえがき

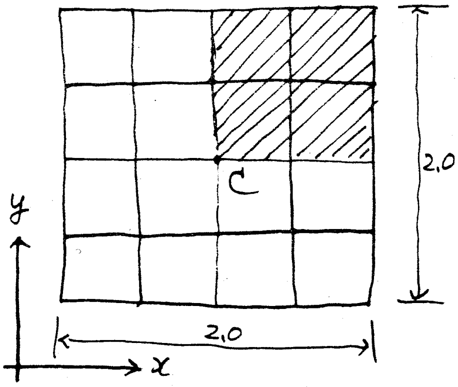
Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.0$$

について，Gauss－Seidel法により数値計算を行い，分割格子数M，収斂判定常数E，収斂までの繰返し演算回数K，およびそれ等と，演算桁数，境界条件の差異，初期値の与え方の差異等との関係を調べてみた。

尚，領域は右図のような，2辺がまずx，y軸に並行な，辺長2.0の正方形で，対称性から，実際の数値計算は斜線部分で行った。

尚，分割数Mは2進分割とし，演算桁は原則として11桁である。



§2、主な数値実験とその結果

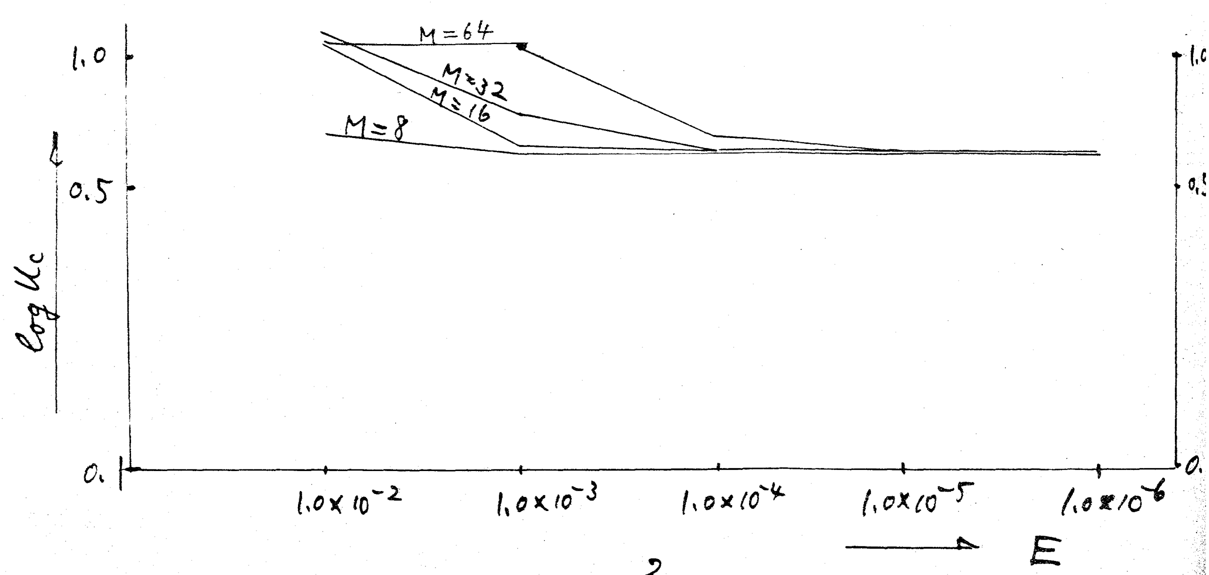
2ー1、解に及ぼすMとEの影響と真値との関係

今，初期値＝1.0，境界値＝0.0，$E=1.0\times10^{-2}\sim1.0\times10^{-6}$，$M=8\sim64$ とすると，中央C点での函数値 u_c は表ー1及び図ー1のように収斂してゆく。今，$E=1.0\times10^{-4}\sim10^{-6}$

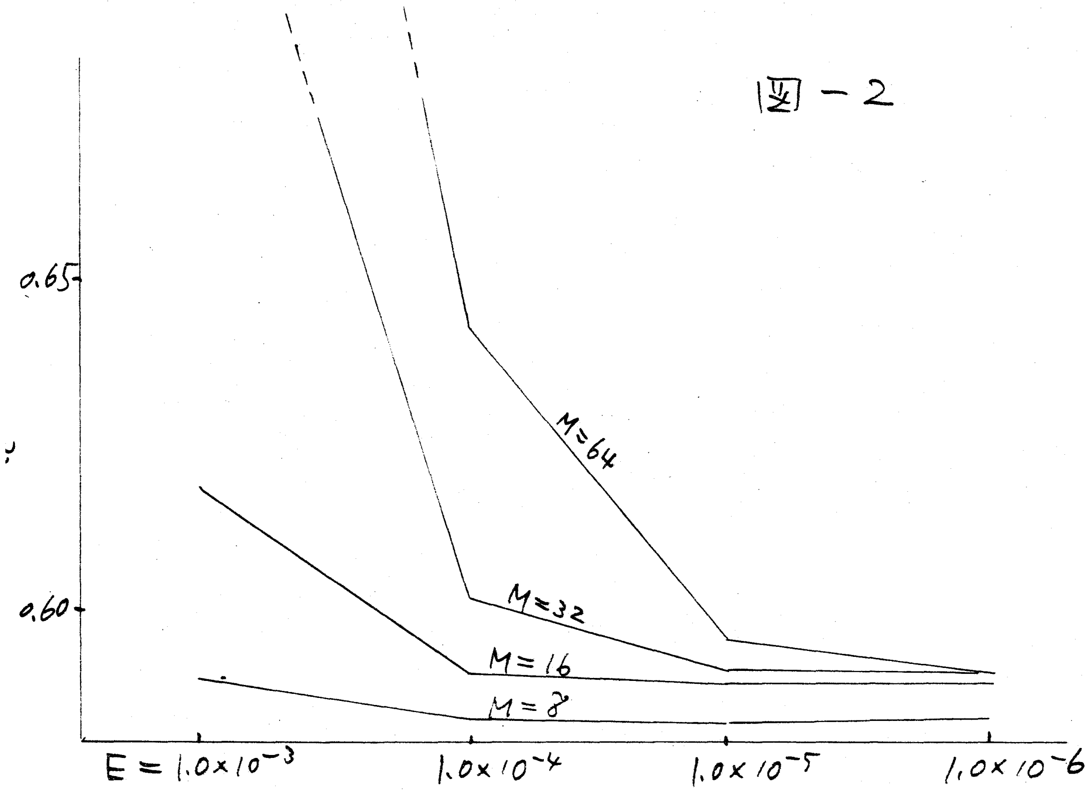
表ー1

M \ E	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}
	u_c				
8	0.66205	0.58968	0.58295	0.58233	0.58227
16	1.02243	0.61900	0.59057	0.58786	0.58760
32	1.10399	0.74249	0.60135	0.59014	0.58904
64	1.03955	1.08500	0.64254	0.59419	0.58975

図ー1



の部分を拡大すると，図－2のようになり，Mの値による夫々のu_cの収斂値は異るようである。いま，このMによるu_cの

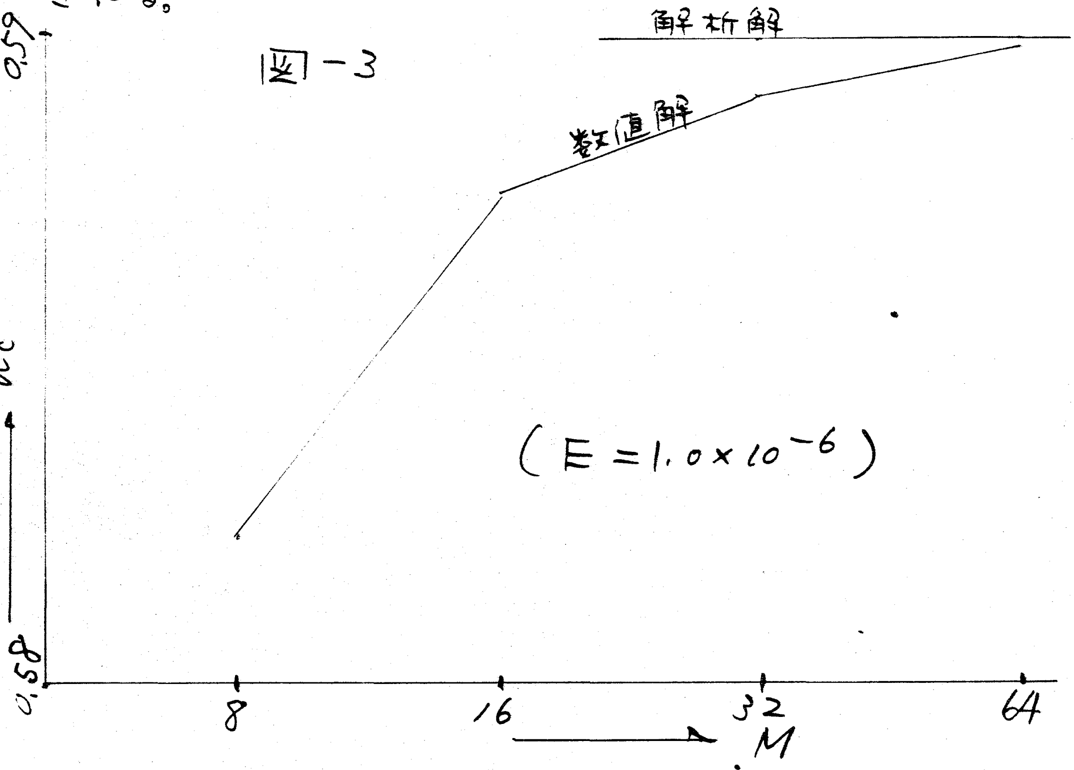


図－2

収斂値が，図－3のようにu_c－M図を考えると，真の値（これは解析解により$u_c = 0.589371$と求められている）へMの増大につれて近付いているように見える。若しこれが真ならば，解析解によらずに或程度迄推定しえよう。

今，念の為，演算桁数を8桁に下げて11桁の分と比べてみたが，このMに関係するu_cの収斂値は，この程度では，表－2に示すように，解や演算回数に殆ど影響しないことが示

される。



表－2

E	8桁 k	8桁 u_c	11桁 k	11桁 u_c
1.0×10^{-2}	39	1.022430	39	1.022431
1.0×10^{-3}	177	0.619004	177	0.619005
1.0×10^{-4}	298	0.590571	298	0.590571
1.0×10^{-5}	417	0.587865	417	0.587865
1.0×10^{-6}	536	0.587596	536	0.587596

2－2. Eとkとの関係

今、初期値1.0，境界値0．0としてEとkとの関係を調べ

ると表－3のようになる。表－3から，イ)精度を10倍ずつ上

表－3　Kの値，( )内はΔK

E \ M	8	16	32	64
1.0×10^{-6}	150 (29)	536 (119)	1,860 (477)	6,295 (1,917)
1.0×10^{-5}	121 (29)	417 (119)	1,383 (481)	4,378 (1,975)
1.0×10^{-4}	92 (30)	298 (121)	902 (521)	2,403 (1,950)
1.0×10^{-3}	62 (30)	177 (138)	381 (319)	453 (471)
1.0×10^{-2}	32	39	62	82
$(\overline{\Delta M})$	(→30)	(→120)	(→480)	(→1,920)

げると，Mは等差数列的に変化する。ロ) Eが小さくなるにつれて，ΔMは分割数の平方に比例してくる。等がわかる。いま，一様乱数を格子番号に対応させて，考えている点をランダムにえらばせてみると，表－4を得る。この表から，一

表－4　Kの値 (M=16)

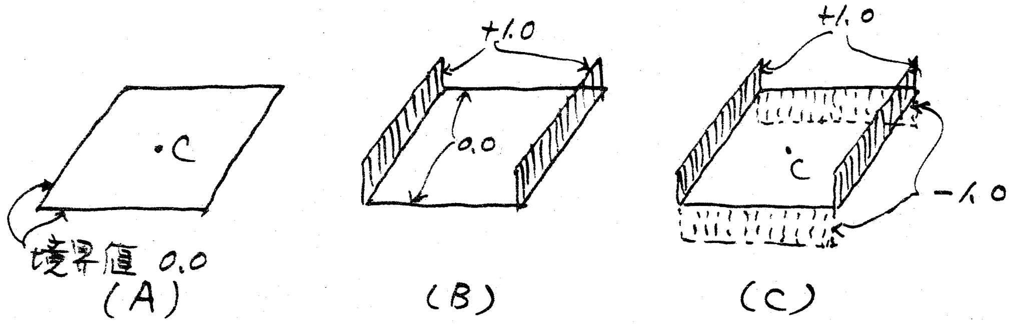
E	一様乱数使用	普通のG.S.法	比
1.0×10^{-3}	21,928 (ΔK=8,254)	$177\times\underbrace{\left(\frac{16}{2}\right)^2}_{\text{換算}}=11,328$	1.93
1.0×10^{-4}	30,182 (ΔK=8,642)	298×(〃)=19,072	1.58
1.0×10^{-5}	38,824	417×(〃)=26,688	1.45

般に，このような場合は，乱数などを使わない方が繰返回数が少ないようであるが，その比は，Eが小さくなるにつれて漸減の傾向にある。

2−3　境界条件を変えてみた場合について。

いま，図−4のようにA，B，C 3つのパターンの境界条件

図−4　境界値の設定



を考える。前と同じく初期値1.0とし，$M=32$ とすると，表−5を得る。表−5から，イ）境界条件が複雑であっても

表−5　Kの値

E	A		B		C	
	K	ΔK	K	ΔK	K	ΔK
1.0×10^{-6}	1,860	477	1,354	478	2,804	476
1.0×10^{-5}	1,383	481	876	482	2,328	474
1.0×10^{-4}	902	521	394	255	1,854	442
1.0×10^{-3}	381	319	139	102	1,412	655
1.0×10^{-2}	62		37		757	

，Kは却って減ることがある。（AとB），ロ）境界条件の如何に拘らず，Eが小さくなればΔKは一定値に近付くように思われる，等が読取れる。

2－4．初期設定値を変化させた場合。

いま，$E=1.0\times10^{-4}$，$M=32$，境界値＝0.0として，初期値を一様に＋2.0から－0.6まで，0.2刻みに変化させてみると，表－6のようになり，これを図示すると，図－5のようになる。

表－6　Kの値

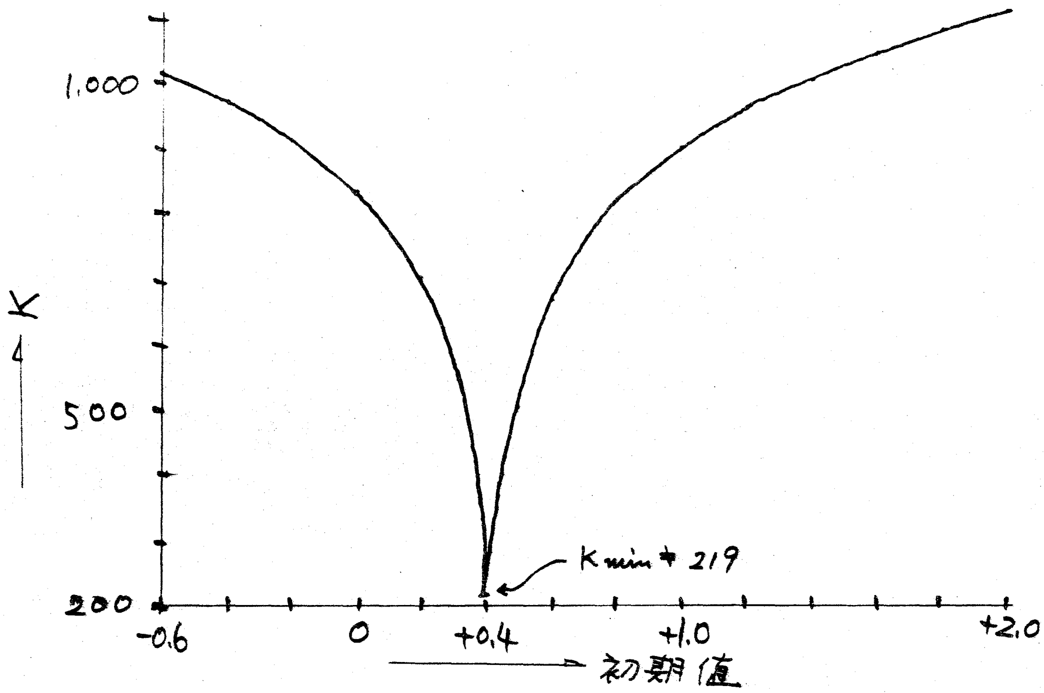
	K	ΔK		K	ΔK
＋2.0	1,106		＋0.6	672	146
1.8	1,078	28	0.4	$K_{min}\fallingdotseq219$	453
1.6	1,046	32	＋0.2	691	－472
1.4	1,009	37	0.0	831	－140
1.2	962	47	－0.2	914	－83
1.0	902	60	0.4	973	－59
＋0.8	818	84	－0.6	1,019	－46
		146			

図－5からわかることは　イ）初期値をうまくとることによって，くり返し回数Kが非常に違ってくる。ロ）初期値に対するKの値は，K_{min}に対して大体対称のようである。等であろう。

§3．あとがき

以上，Poisson方程式の一例について，若干の計算

図－5



例を示したが，以上の外に色々の組合せ（例えば，原式の右辺常数項を変えてみる等）を行うこと等によって，又，種々の事実が明かにされるかもしれない。

以上