

板の端, 物体の角における  
流れの特異性

群馬大教育 阿曾 義之

§ 1. 序

断面が角をもつ無限に長い柱状物体を過ぎる 2 次元の粘性流の問題を, 解析的にまたは数値的に解くためには, あらかじめ角における流れの特異性を知ることが望ましい。

流れの関数を, 十分に角に近い範囲で頂点からの距離  $r$  の中の級数に展開したときの第 1 項は, Stokes 近似の方程式にしたがう。Dean と Montagnon<sup>(1)</sup>, Moffatt<sup>(2)</sup> は, Stokes 近似で, 角の近傍の流れの様子を調べ, 特に次のような意外な結果を得た。すなわち “断面の角度が約  $214^\circ$  より大きい場合 (流れの領域の角度が  $146^\circ$  より小さい場合) には, 無限個の微小な渦が頂点に向かって配列し, その大きさと強さは等比級数的に減じている。” というのである。

実際の流れにおいても, 果してこのような渦があらわれるかどうかは, 研究会の席上でも大いに問題となった。以下

上記 2 論文の結果を紹介し, Navier-Stokes 方程式の解 (実際の流れ) の場合に論及する。

## § 2. 基礎方程式

流速を  $(u, v)$ , 流れの関数を  $\Psi$  ( $u = \Psi_x$ ,  $v = \Psi_y$ ) とし, 変数  $(x, y)$  の代わりに複素変数  $(z, \bar{z})$  を使うと

$$w \equiv u - iv = 2i\Psi_z, \quad \bar{w} = u + iv = -2i\Psi_{\bar{z}}. \quad (1)$$

N-S 方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} p_z &= i4\nu\Psi_{zz\bar{z}} + 2(\Psi_z\Psi_{z\bar{z}} - \Psi_{\bar{z}}\Psi_{zz}) \\ \frac{1}{\rho} p_{\bar{z}} &= -i4\nu\Psi_{z\bar{z}\bar{z}} + 2(\Psi_{\bar{z}}\Psi_{z\bar{z}} - \Psi_z\Psi_{\bar{z}\bar{z}}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$p$  を消去して

$$\Psi_{zz\bar{z}\bar{z}} + \frac{i}{2\nu}(\Psi_z\Psi_{zz\bar{z}} - \Psi_z\Psi_{z\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3)$$

流れの代表的長さを  $L$ , 代表的速さを (例えば  $(\frac{\partial \Psi}{\partial y})_\infty$ ) を  $U$ , レイノルツ数を  $R \equiv \frac{LU}{\nu}$  とし,  $\psi = \Psi/LU$ ,  $\zeta = z/L$  と変換すると (故に 代表的長さ = 1, 代表的速さ = 1),

$$\psi_{\zeta\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} + \frac{i}{2}R(\psi_\zeta\psi_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} - \psi_\zeta\psi_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}}) = 0. \quad (3')$$

また更に,  $\psi^* = \psi R$ ,  $z^* = R\zeta$  とおくと (代表的長さ =  $R$ , 代表的速さ = 1),

$$\psi_{z^*z^*\bar{z}^*\bar{z}^*} + \frac{i}{2}(\psi_{z^*}^*\psi_{z^*z^*\bar{z}^*\bar{z}^*}^* - \psi_{z^*}^*\psi_{z^*\bar{z}^*\bar{z}^*}^*) = 0. \quad (3'')$$

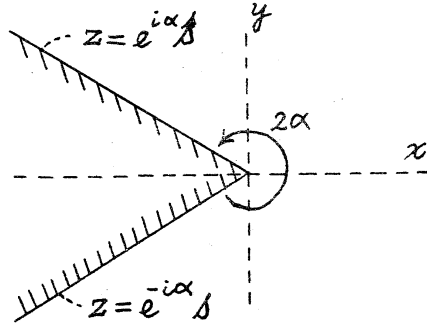
以後, 式 (3') または (3'') を扱おうが, 便宜上 変数は  $\zeta, z^*$  と書く代わりに すべて  $z$  と記し,  $\psi^*$  も  $\psi$  と書くことにする。

物体断面の角を  $2\pi - 2\alpha$  とし、座標軸を 1-図に示すよ  
 うにとる。  $\delta$  は頂点からの弧長。

断面が曲率を持つ場合は省略する。

物体表面における境界条件は、

(1)式が  $\psi = \text{real}$  を使っている  
 ことを考慮して



1-図. 物体断面図

$$\psi_z = 0 \quad (\psi : \text{real}), \quad \dots (4)$$

$$\text{または} \quad \psi_z = \psi_{\bar{z}} = 0. \quad \dots (4')$$

さて、 $\psi$  は原点の近傍で動径  $r$  の中に展開できるものと  
 仮定する。ただし、 $r$  の中の次数  $m$  は必ずしも実数とは  
 限らない。

$$\psi = \sum_m F_m = \sum_m r^m f_m(\theta) \quad (\text{註}) \quad (5)$$

これを(3) または(3') に代入すると、少くとも最初の項  $F_m$   
 が Stokes 近似の方程式  $\psi_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \equiv (\frac{1}{2})^2 \Delta \Delta \psi = 0$  を満たす  
 ことは明らかである。

(註) やや拡張して

$$\psi = \sum r^m f_m(\theta) + \sum r^m \ln r g_m(\theta)$$

として出発しても、境界条件から  $\ln r$  の項は不必要とな  
 る(少くも初項に関する限り) ことが証明される。

## § 3. Stokes 近似

$$\text{方程式} \quad \Psi_{zz\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (6)$$

の解は

$$\Psi = AZ^m + B\bar{Z}^m + CZZ^{m-1} + DZ\bar{Z}^{m-1} \\ + (\bar{A}\bar{Z}^{\bar{m}} + \bar{B}Z^{\bar{m}} + \bar{C}Z\bar{Z}^{\bar{m}-1} + \bar{D}\bar{Z}Z^{\bar{m}-1}) \quad (7)$$

ただし, 第2行目は  $m$  が実数の時は不要で  $B = \bar{A}$ ,  $D = \bar{C}$ .

なお  $x$  軸に関する流れの対称性は

$$\Psi(z, \bar{z}) = \mp \Psi(\bar{z}, z) \quad \text{i. e.} \quad B = \mp A, \quad D = \mp C \quad (8)$$

によって表わされる。ただし上号は流れが上下対称 ( $\Psi$  は反対称), 下号は流れが反対称 ( $\Psi$  は対称) の場合である。

さらに

(i) 境界上で  $\Psi_z = \Psi_{\bar{z}} = 0$  より

$$\text{or } m \geq 1.$$

(ii)  $m \neq 1$ . 境界条件から簡単に導かれる。

(iii)  $m = 2$  が可能なのは次の場合に限られることも容易

に分る:

$$2\alpha = 2\pi, \pi, \text{ および } 2\alpha^*$$

ただし  $2\alpha^*$  は  $x = \tan x$  の解で, したがって  $\frac{\sin x}{x}$  が極値をとる。

境界条件(8') から (7) の係数間の関係を求める。

$$\begin{aligned}\psi_z &= z^{m-1} \{ mA + (m-1)C\bar{z}z^{-1} + D\bar{z}^{m-1}z^{-(m-1)} \}, \\ \psi_{\bar{z}} &= \bar{z}^{m-1} \{ mB + Cz^{m-1}\bar{z}^{-(m-1)} + (m-1)Dz\bar{z}^{-1} \}.\end{aligned}$$

そこで

$$\delta \equiv e^{i2\alpha}, \quad \delta^{-1} \equiv e^{-i2\alpha} \quad (9)$$

とおき、境界条件を入れると

$$\left. \begin{aligned}z = e^{i\alpha}\delta \quad \text{に対し} \quad & mA + (m-1)C\delta^{-1} + D\delta^{-1} = 0 \\ & mB + C\delta + (m-1)D\delta = 0 \\ z = e^{-i\alpha}\delta \quad \text{に対し} \quad & mA + (m-1)C\delta + D\delta = 0 \\ & mB + C\delta^{-1} + (m-1)D\delta^{-1} = 0\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

A, B を消去すると

$$\left. \begin{aligned}(m-1)(\delta - \delta^{-1})C + (\delta - \delta^{-1})D &= 0 \\ (\delta - \delta^{-1})C + (m-1)(\delta - \delta^{-1})D &= 0\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\therefore (m-1)^2(\delta - \delta^{-1})^2 - (\delta - \delta^{-1})^2 &= 0 \\ (m-1)(\delta - \delta^{-1}) &= \pm(\delta - \delta^{-1}) \quad (12) \\ (m-1)\sin 2\alpha &= \pm \sin 2\alpha(m-1)\end{aligned}$$

今  $\chi \equiv 2\alpha(m-1)$  とおくと

$$\left. \begin{aligned}\frac{\sin \chi}{\chi} &= \pm \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \\ m &= 1 + \frac{\chi}{2\alpha}\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

これが  $m$  を決定する式である。

$$(11)(12) \text{ より } (m-1)(\delta-\delta^{-1})(C \pm D) = 0$$

(1)  $\delta \neq \delta^{-1}$  のとき

$$D = \mp C$$

$$(10) \text{ より } \left. \begin{aligned} mA &= \{- (m-1) \cos 2\alpha \pm \cos (2\alpha(m-1))\} C \\ B &= \mp A \end{aligned} \right\} (14)$$

ただし複号同順, (8)より上号は対称流, 下号は反対称流に対応する。

(2)  $\delta - \delta^{-1} = 0$  のとき ( $\sin 2\alpha = 0$ )

$$2\alpha = 2\pi, \pi.$$

この場合は以下に見るよう  $m$  は実数で

$$B = \bar{A}, \quad D = \bar{C}.$$

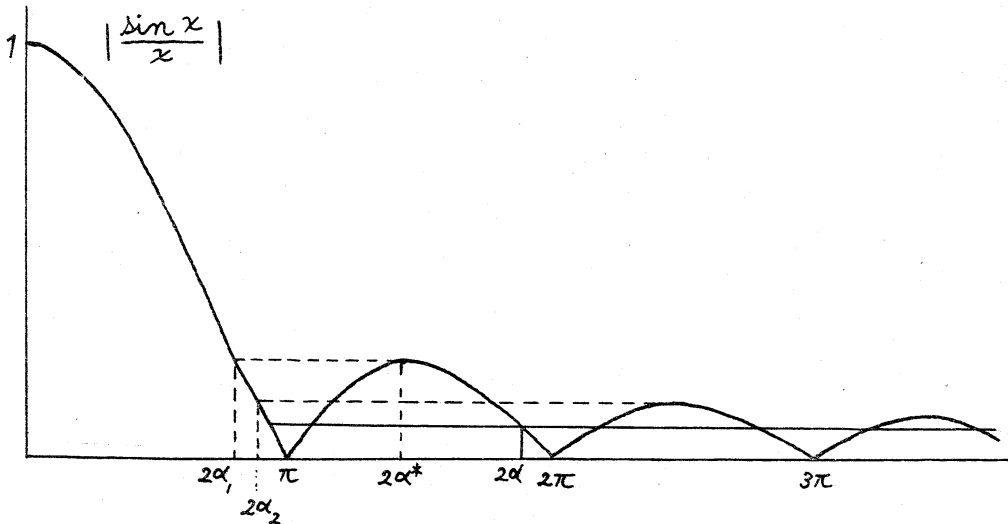
$$2\alpha = 2\pi \text{ のとき } \left. \begin{aligned} m &= \frac{n}{2} + 1 \quad (n=1, 2, \dots) \\ mA &= -(m-1)C - (-1)^n \bar{C}. \end{aligned} \right\} (15)$$

$2\alpha = \pi$  のとき (断面が角をなすとき)

$$m = n + 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$mA = (m-1)C - (-1)^n \bar{C}.$$

さて,  $m$  を定める式 (13) を調べるには 2-図によればよい。  
 $2\alpha$  が与えられときの (13) の解  $x$  を求めるには, 図の横軸に  
 平行な実線と  $|\sin x/x|$  のグラフとの交点の横座標を見れば  
 よい。



2-図

$\alpha = 2\pi, \pi$  の時, 実数  $m$  は 無数にある。(前出).

$\alpha \neq 2\pi, \pi$  の時, 実数の  $m$  は 有限個しか存しない。

$2\alpha < 2\alpha_1 \doteq 146^\circ$  の時, 反対称流に対応する  $m$  は  
すべて複素数。

$2\alpha < 2\alpha_2 \doteq 156^\circ$  の時, 対称流に対応する  $m$  は  
すべて複素数。

$m$  が複素数のときの値を求めるには,

$$m-1 \equiv p + iq \quad \text{とおくと}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha p \cosh 2\alpha q &= \pm p \sin 2\alpha, \\ \cos 2\alpha p \sinh 2\alpha q &= \pm q \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

これから  $p, q$  を定める。

$m$  が複素数の時の流れの様子を調べる。 例えは

$$z^{m-1} = z^{p+iq} = r^{p+iq} \{ \cos(q \ln r) + i \sin(q \ln r) \} \\ \times e^{-q\theta} \{ \cos(p\theta) + i \sin(p\theta) \}.$$

3-図に見るように、 $x$  軸上に中心を持つ渦が原点に向かって無限個並ぶ。

各渦の中心の位置  $x_n$  は、 $x$  軸上で  $v=0$  となる点である。

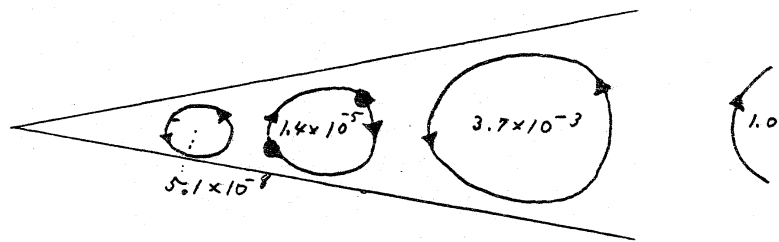
$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\pi/q} \equiv \rho \geq 1$$

公比  $\rho$  で、等比級数的に渦の大きさは小さくなる。

各渦の強さは、 $x$  軸上で  $|v|$  の極大値  $v_{n, \max}$  を以て、その目安とすると

$$\frac{v_{n, \max}}{v_{n+1, \max}} = e^{\pi p/q} \equiv \omega \geq 1$$

公比  $\omega$  で、等比級数的に弱くなる。



3-図  $2\alpha = 20^\circ$  の時の渦

一般に、角から離れた所では流れの様子は無限の多様性を持つから、角の近傍での解も一般解としては無限個の任意定



数を含まねばならぬ。すなわち

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_m \Psi_m \\ &= \sum_m (C_{m,1} \Psi_{m,\text{odd}} + C_{m,2} \Psi_{m,\text{even}}).\end{aligned}\quad (17)$$

各次数  $m$  ごとに, 2個の任意定数が参加してくる。

#### §4. Navier-Stokes 方程式の解

N-S 方程式(3')を見れば明らかのように,  $\Psi$  中の  $r^{m_1}, r^{m_2}$  の次数の項があれば両者による慣性項(非線型項)は  $r$  の  $m_1 + m_2 - 4$  次となり, これに対応して  $\Psi$  の中に  $r$  の  $m_1 + m_2 = m'$  次の項  $F_{m'}$  が必要となる。

今, 記述の簡単のため  $2\alpha \neq 2\pi, \pi$  として  $m' = m_1 + m_2$  は前節で得られる  $m$  と一致することはないものとする。

慣性項を  $\frac{i}{2} R G_{m_1, m_2}$  と書くと,  $F_{m'}$  の満たすべき方程式は  $F_{m', z z \bar{z} \bar{z}} = -\frac{i}{2} R G_{m_1, m_2}$  となるが,  $F_{m'} \equiv R \Psi_{m'}^I$  と書けば

$$\Psi_{m', z z \bar{z} \bar{z}}^I = -\frac{i}{2} G_{m_1, m_2} \quad (\text{註})$$

更け,  $\Psi_{m'}^I$  と  $\Psi_m$  の作る慣性項から,  $\Psi_{m''}^{\text{II}}$  が必要となる。

以下同様にして, N-S 方程式の解を角の近傍で  $r$  の中に展開したもの的一般形は

(註) この与えられた  $m' = m_1 + m_2$  に対し, 境界条件が充たれ得るかどうかは問題である。

$$\Psi = \sum \Psi_m + R \sum \Psi_m^I + R^2 \sum \Psi_m^{II} + \dots \quad (18)$$

任意定数は  $\Psi_m$  の中に 2 個ずつ入っている。

これは Stokes 近似を第 0 近似として逐次近似したものとも考えられるが、この場合の仮定は  $R \sim 0$  ではなく、 $r \sim 0$  である。  $R$  が大きければ、この展開の収斂半径は恐らく非常に小さくなる。このことは、基礎方程式(3')において  $R$  が大きい時 Stokes 近似の項  $\Psi_{zzzz}$  は重要でなくなることから、当然であろう。

方程式(3')では代表的長さ(例えば板では断面の長さ)が 1 であるが、(3')から(3'')のように変数変換をすると、式中に  $R$  は表われなすが代表的長さが  $R$  となる。このようなことを考えると、 $\Psi$  の展開式(18)の収斂半径は  $\frac{1}{R}$  の程度と豫想してもよいかも知れない。

Oseen 近似ではあるが、平板に流れが垂直にあたる場合、玉田-宮城の論文<sup>(3)</sup>に見るように、レイノルズ数  $R$  が大きいと、板の端の大部分で渦度( $\Psi$  を 2 回微分したもの)は  $r^{-\frac{1}{2}}$  の程度で、端に非常に近い所で  $r^{-\frac{1}{2}}$  の程度である。これも同様の事情であると解される。

なお、実験や数値計算で、Moffatt の述べた渦を検出できるかどうか：展開式の収束半径がふつうは非常に小さく、

また §3 に述べたように渦の強さも角の頂点に近づくにつれ幾何級数的に減少するので、検出は困難であると思われる。

しかし Reynolds 数  $R$  を充分小さくとれば収束半径がひろがって、測定または計算にひっかかってくる可能性がある。<sup>(\*)</sup>

### 文献

- (1) Dean, W.R. & Montagnon, P.E.: *On the steady motion of viscous liquid in a corner*,  
Proc, Camb. Phil. Soc. 45 (1949) 389-394.
- (2) Moffatt, H.K.: *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*, J. Fluid Mech. 18 (1964) 1-18.
- (3) Tamada, K. & Miyagi, T.: *Laminar viscous flow past a flat plate set normal to the stream, with special reference to high Reynolds numbers*,  
J. Phys. Soc. Japan, 17 (1962) 373-390.
- (\*) Schubert, G.: *Viscous flow near a cusped corner*,  
J. Fluid Mech. 27 (1967) 647-656.