数理解析研究所講究録
53巻 1968年 166-169

Subvarietyの Embedding と Formal rational functions.

名大 理　松村英之

文献

[1] H. Hironaka: On some formal imbeddings. (To appear on Illinois Journal).

[2] H. Hironaka and H. Matsumura: Formal functions and formal embeddings. J. of Math. Soc. Japan, 20 (1968), 52-82.

[3] R. Hartshorne: Cohomological dimension of algebraic varieties (To appear on Ann. Math)

代数的多様体 Z とその subvariety X とを考えよう. X の Z の中への入り方をしらべる有力な方法の1つは, Z の X に沿っての完備化 $\hat{Z}$ を考えることである. $\hat{Z}$ は formal scheme と呼ばれる ringed space であって, その関数体 $K(\hat{Z})$ が考えられる. $K(\hat{Z})$ の元は Zariski

流に言えば abstract meromorphic functions と呼べるであろうが，正しくは formal rational functions と呼ばれる．$K(\hat{Z})$ は Z の関数体 $K(Z)$ の拡大体である．$[K(\hat{Z}):K(Z)]<\infty$ のとき <u>X は Z の中で G2 である</u>といい，$K(\hat{Z})=K(Z)$ のとき <u>G3</u> であるということにする．X が Z の中で G3 ならば，$\hat{Z}$ が Z を birational equivalence を除いて一意的に定める訳であるから，X は Z の中でかなり一般の位置にあるといえよう．

[2] においてわれわれは次のことを示した：

i) $f: Z' \longrightarrow Z$ が proper, surjective な morphism of normal varieties ならば，$X' = f^{-1}(X)$ とおくとき，Z' の X' に沿っての完備化を $\hat{Z}'$ とすれば

$$K(\hat{Z}') = \left[K(Z') \otimes_{K(Z)} K(\hat{Z}) \text{ の全商環} \right].$$

これから，X が Z で G2 (resp. G3) ならば X' が Z' でそうであるということが判る．特に，X が<u>連結</u>で G3 ならば X' も G3 である．また，X' が G3 なら X も G3 である．

ii) $Z_1, \cdots, Z_n$ が normal varieties で $e_i \in Z_i$ ならば，$X = \bigcup_i (e_1 \times \cdots \times e_{i-1} \times Z_i \times e_{i+1} \times \cdots \times e_n)$ は $Z = \prod Z_i$ の中で G3 である．

iii) $Z=\mathbb{P}^n$ (体の上の projective space) ならば，Zの任意の connected subvariety X は Z で G3 である．

iv) Z が abelian variety で X が connected subvariety ならば，X が Z の原点を含むとするとき

$$X \text{ is } G2 \text{ in } Z \iff X \text{ が } Z \text{ を generate する}$$

が成立つ．

[2]より先に書かれた広中氏の[1]では，Z が smooth で X が codimension 1 のときに，X の normal bundle (それは X 上の line bundle である) が ample ならば X は G3 であるという結果が (その他の結果と共に) 得られている．[3]で Hartshorne は，Z を smooth variety とし X を locally complete intersection in Z とするとき，X の normal bundle が彼の意味で ample ならば X は G2 であるということを示している．$\mathbb{P}^n$ の任意の smooth subvariety は ample normal bundle をもつから，$\mathbb{P}^n$ で G2 であるが，更に広中氏のテクニックを用いて彼は上記 iii) を導いている．また彼は Z−X の cohomological な性質をしらべて興味ある結果を得ている．

基礎体が $\mathbb{C}$ のとき，X が Z で G3 であるということは，X の Z における近傍（classical topology での）の上の有理型関数が，Z 全体における有理型関数に拡張されることを含んでいる．（こゝで Z はもちろん compact と仮定する）．代数的条件から解析的な定理を証明するのに，直接やれば convergence の問題が生ずるが，analytic geometry を飛越えて formal geometry の定理を代数的に証明しておけば，GAGA principle で analytic results は系として得られてしまう．これが広中氏の自慢のひとつである．

[2]の諸定理を組合わせると，たとえば，アーベル多様体 A を hyperplanes で切つて得られる curve は A を生成するという定理などは容易に得られる．幾何学的な応用は外にもありそうに思われる．

以上．