数理解析研究所講究録
53巻 1968年 80-90

Brauer群の一般化について

名大 理　　竹本秀夫

GrothendieckのBrauer群II, III [4] の中から, 1. Kummerの完全列から容易に出る結果, 2. SchemeのBrauer群の一般化, 及び 3. Weil予想とTate予想との関係について紹介します。

1、以下 1. 2. 3. を通じてTopologyは, すべてétale topologyとし, 又, 簡単の為に, Xを体k上のpreschemeとする。($ch.k = p$)
X上multiplicative group $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X[t, t^{-1}])$によってrepresentされるsheafを$G_{m,X}$で表わす。$\mu_{n,X}$を完全列 $0 \to \mu_{n,X} \to G_{m,X} \xrightarrow[x \mapsto x^n]{} G_{m,X}$で定義すると, $(n,p)=1$の時, $u \in G_m(U)$ $U \xrightarrow{x \mapsto} X$ étaleに対し, $U' = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_U[T]/T^n - u$はU上 étale coveringだから, 次のKummerの完全列が成立する。

(1)　定理　$0 \to \mu_{n,X} \to G_{m,X} \xrightarrow{n} G_{m,X} \to 0$　$(n,p)=1$

注. $\mu_{n,X}$は (étale topologyで) 局所的にconstant sheaf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$に同型である。

以下の話において, ℓ素数 $(\ell, p)=1$とする。(1)の完全列より,

(1)′　$0 \to H^{i-1}(X, G_m)_{\ell^\nu} \to H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \to {}_{\ell^\nu}H^i(X, G_m) \to 0$

（ここで，M：アーベル群，$M_n = \mathrm{Coker}(M \xrightarrow{n} M)$，${}_nM = \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{n} M)$）

$\mu_{\ell^\infty}^{\otimes n} = \varinjlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n}$，$\mathbb{Z}_\ell[n] = \varprojlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n}$ とおく。

(2) $0 \to H^{i-1}(X, G_m) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^i(X, \mu_{\ell^\infty}) \to H^i(X, G_m)(\ell) \to 0$ (exact)

（ここで，$M(\ell) = \{ m \in M \mid \ell^\nu m = 0 \}$）

X：regular noeth. とすれば，$H^q(X, G_m)$ は torsion group ($q \geq 2$) だから（小崎氏の話），次の系を得る。

(3) 系 X：regular noeth. $\Rightarrow H^i(X, G_m)(\ell) \simeq H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ $i \geq 3$

今後，$Br'(X) = H^2(X, G_m)$ とおき，cohomological Brauer群という。$H^1(X_{et}, G_m) = H^1(X_{zar}, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X)$ [2] SGAA exposé 9 に注意して，(2)より $0 \to \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) \to Br'(X)(\ell) \to 0$

（$M = M(\ell)$ の時，Mが finite corank $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} M \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r \times$ 有限群 $\Leftrightarrow {}_\ell M$：有限
この時，r を M の corank という。）

k：sep. closed X：proper over k の時，$H^2(X, \mu_\ell)$：有限だから，$H^2(X, \mu_{\ell^\infty})$，$Br'(X)(\ell)$ は finite corank。更に，X：finite type の時，$0 \to \mathrm{Pic}(X)^0 \to \mathrm{Pic}(X) \to NS(X) \to 0$ （$\mathrm{Pic}(X)^0$ は，ℓ-divisible group，NS(X)は finite type abelian group）だから，corank $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ = rank NS(X) 又，$0 \to \mu_{\ell^\nu} \to \mu_{\ell^\infty} \xrightarrow{\ell^\nu} \mu_{\ell^\infty} \to 0$ を用いて，上と同様な議論を行うと，（$T_\ell(M) = \varprojlim_\nu {}_{\ell^\nu}M$）

$H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \simeq T_\ell(H^2(X, \mu_{\ell^\infty})) \oplus$ (ℓ-torsion 有限群) を得る。

よって corank $H^2(X, \mu_{\ell^\infty})$ = rank $H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1])$ = rank $H^2(X, \mathbb{Z}_\ell)$ $= B_{2,\ell}$（= ℓ-adique 2次元 Betti 数）

2.

以上をまとめると、

<u>定理</u>　k: sep. closed　X: k上 finite type, proper の時、

$$\operatorname{corank} Br'(X)(\ell) = B_{2,\ell} - \rho \quad (= \text{Lefschetz number})$$
$$\rho = \operatorname{rank} NS(X) : \text{Picard number}$$

系、k: sep. closed　X: k上 proper, lisse　$\dim X \leq 2$ の時

$\operatorname{corank} Br(X)(\ell)$ は、ℓ に independent。

∵) $B_{\ell,1} = \operatorname{rank} H^1(X, \mathbb{Z}_\ell) = \operatorname{corank} H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = \operatorname{corank} Pic(X)(\ell)$
$= \operatorname{corank} Pic(X)^0(\ell) = \operatorname{rank} T_\ell(Pic(X)^0) = 2\cdot$(Picard scheme の次元)

又、étale topology の duality より $B_i = B_{2n-i}$ ($n = \dim X$), Euler Poincaré $\sum (-1)^i B_i$ は、$X \times X$ での diagonal の self-intersection と解釈。実は、$\dim X = 1$ の時、系の仮定の下で $Br'(X) = Br(X) = 0$ (川崎、田原両氏の注意)。

同様に、ℓ-adique Betti number が ℓ に indep がいえれば、$\operatorname{corank} Br'(X)(\ell)$ も ℓ に indep. がわかる。

注、定理より $B_{2\ell} \geq \rho$　これは Igusa [6] が k: alg. closed X: projective lisse surface の場合示した不等式である。

<u>2.0.</u>　cohomological Brauer 群を一般化しようとする時、一番簡単なのは、$H^i(X, \mathbb{G}_m)$ ($i \geq 3$) を考えることであるが、(3)で見る様に、X: regular noeth. の時、$H^i(X, \mathbb{G}_m)(\ell) \cong H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ ($i \geq 3$) となり、本質的に新たな invariant でない。Br III. 7

で示されている様に，$Br'(X)$ について birational invariance が成り立っているから（一般には $Br'(X)(\ell)$ について），そのようないい性質を持つ一般化をしようとするのが，次に述べる Grothendieck の方法である。

2.1. U：k 上 finite type，lisse scheme とし，

仮定 k 上 lisse，proper scheme X が存在して，U は X の open dense である。（これは singularity の resolution が使えれば，いえるから，$ch=0$ 又は $\dim X \leqq 2$ k：perfect の時，成立する。）

$$H^i_\wedge(U, \mu_{\ell^\nu}) \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathrm{Im}(H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \longrightarrow H^i(U, \mu_{\ell^\nu}))$$

これは，X のとり方によらない。（2.3で示す）

（ここで，μ_{ℓ^ν} の代りに，一般に F：locally const. ℓ-torsion sheaf としてもよい。）　$U \supset V$ open　$H^i_\wedge(U,F) \to H^i_\wedge(V,F)$ surj.

更に，U：irreducible　商体 K

$$H^i_\wedge(K, \mu_{\ell^\nu}) \overset{\text{def.}}{=\!=} \varinjlim_{\phi \neq V < U \text{ open}} H^i_\wedge(V, \mu_{\ell^\nu})$$

定義から明らかに，$H^i_\wedge(K, \mu_{\ell^\nu})$ は k の有限次拡大 K の birational invariant である。$H^i(X, \mu_{\ell^\nu})$ は有限群だから，その quotient である ① $H^i_\wedge(K, \mu_{\ell^\nu})$ は有限群．（k：sep. closed）

又，U：affine open の時，cohomological dim $\leqq$ Zariski-dim（SGAA exposé 14 [2]）だから，birational invariance より

② $i >$ deg. tr. K/k の時，$H^i_\wedge(K, \mu_{\ell^\nu}) = 0$。

2.2. X : k上 proper lisse connected　K : 商体

Definition.　$Gr^0 H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) = H^i_\lambda(K, \mu_{\ell^\nu})$

定義から，これは birational invariant。又 $Gr^0 H^i(X, \mu_{\ell^\nu})$ は $H^i(X, \mu_{\ell^\nu})$ の商である。　注．この定義は，μ_{ℓ^ν} の代りに μ_{ℓ^∞}, $\mathbb{Z}_\ell[1]$ etc．としてもよい。

2.3. X : k上 lisse scheme　$F = \mu_{\ell^\nu}$　$f : X' \to X$ proper birational, $f^*(F) = F'$, $X \supset U$ open $f^{-1}(U) = U' \cong U$ 同型．

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, F) & \xrightarrow{g^i} & H^i(U, F|U) \\ \downarrow & & \wr\wr \\ H^i(X', F') & \xrightarrow{g'^i} & H^i(U', F'|U') \end{array}$$

とする時，$\underline{\mathrm{Im}\, g^i = \mathrm{Im}\, g'^i}$ これを示すために，$Y = X - U$，$f^{-1}(Y) = Y' = X' - U'$ とおき，次の完全列を用いれば，

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X, F) & \to & H^i(U, F|U) & \to & H^{i+1}_Y(X, F) \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ H^i(X', F') & \to & H^i(U', F'|U') & \to & H^{i+1}_{Y'}(X', F') \end{array}$$

$H^{i+1}_Y(X, F) \to H^{i+1}_{Y'}(X', F')$ が injective をいえばよい。その為に一般の closed subset Y について，$(Y' = f^{-1}(Y))$　$H^i_{Y'}(X', F') \to H^i_Y(X, F)$ が存在して，canonical morph $H^i_Y(X, F) \to H^i_{Y'}(X', F')$ との composite morph $H^i_Y(X, F) \to H^i_{Y'}(X', F') \to H^i_Y(X, F)$ が恒等写像であることをいう。一方，étale topology の duality の定理を用いれば，X, f に関する仮定より $Rf_*F' \to F$ が存在して，canonical morph $F \to Rf_*F'$ との合成 $F \to Rf_*F' \to F$ が identity な事がわかる。support を Y に持つ global section をとる functor を Γ_Y とする。

$R\Gamma_Y(F) \to R\Gamma_Y Rf_*(F') = R\Gamma_{Y'}(F') \to R\Gamma_Y(F)$: identity。こ次の

cohomology をとれば，求めるものが得られる。この事を使えば，2.1.での $H^i_Y(U, \mu_{\ell^\nu})$ の定義が次の様に X のとり方によらない事がわかる。つまり，X' も X と同じ仮定をみたすとすれば，$f: X'' \to X$，$f': X'' \to X'$ がこの 2.3. の初めの仮定をみたす様な X'', f, f' が存在するから，$\mathrm{Im}\, g^i = \mathrm{Im}\, g'^i$ を使えばよい。

<u>2.4.</u> ここで 2.3. の定義が求めるものである事を示す。$X \supset U$: open $Y = X - U$，予稿集で示した様に，$H^1_Y(X, \mu_{\ell^\nu}) = 0$

$H^2_Y(X, \mu_{\ell^\nu}) = H^0(X, \sum_i (\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})_{x_i})$（$x_i$ は Y の codim 1 の max. points）

となることに注意して，local cohomology の完全列を使えば，

$$0 \to H^1(X, \mu_{\ell^\nu}) \to H^1(U, \mu_{\ell^\nu}) \to H^0(X, \sum_i (\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})_{x_i}) \to H^2(X, \mu_{\ell^\nu}) \to H^2(U, \mu_{\ell^\nu})$$

よって $Gr^0 H^1(X, \mu_{\ell^\nu}) = H^1(X, \mu_{\ell^\nu})$，$Gr^0 H^2(X, \mu_{\ell^\nu}) = H^2(X, \mu_{\ell^\nu}) / \mathrm{Im}\, \mathrm{Div}(X, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$

ここで，$\mathrm{Div}(X, F)$ は，F-係数の divisors の群を表わす。

$H^0(X, G_m) = k^*$ k: alg. closed の時，$H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = \mathrm{Pic}(X)(\ell)$

$Gr^0 H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = \mathrm{Pic}(X)(\ell)$，同様に，$Gr^0 H^1(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) = T_\ell(\mathrm{Pic}(X))$

X : regular noeth の時，$\mathrm{Div}(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Pic}(X)$ surjective だから 1 の (2) $i=2$ から，$Gr^0 H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) \cong Br'(X)(\ell)$ これが求めていたものである。又，$Gr^0 H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) / \mathrm{Im}\, \mathrm{Div}(X, \mathbb{Z}_\ell)$

これは，2次元 ℓ-adique cohomology 群の transcendental part であって，この rank が $B_{2,\ell} - \rho$ = Lefschetz number である。classical な場合によく知られている [12] 様に，Lefschetz 数が birational invariant な事がわかる。

6.

<u>3.1.</u>　2.2.で定義した$Gr^0 H^i(X,F)$は, $H^i(X,F)/\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$と書ける。ここで, $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F) = \sum \mathrm{Ker}\,(H^i(X,F) \to H^i(U,F))$ ($\sum$は, $X \supset U$ open $\neq \phi$)。よって一般に$H^i(X,F)$に自然なfiltration $\mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \sum \mathrm{Ker}(H^i(X,F) \to H^i(U,F))$ ($\sum$は$\mathrm{codim}(X-U,X) \geqq p$ U: open)が定義できる。$H^i_Y(X,F) \to H^i(X,F) \to H^i(U,F)$ $(Y = X - U)$を使えば, $\mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \sum \mathrm{Im}(H^i_Y(X,F) \to H^i(X,F))$ ($\sum$は$\mathrm{codim}(Y,X) \geqq p$)と書けるが, 更によい表わし方をする為に次の定理を使う。

Cohomological purityの定理 (SGAA exposé 16, 19)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "\text{lisse}"'] & & X \arrow[dl, "\text{lisse}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

closed immersion, 各点でcodim c

F: localにconst. 有限群に同型。$nF = 0$

その時, $\underline{H}^i_Y(F) = 0$ $i \neq 2c$, $\underline{H}^{2c}_Y(F) = i^*(F) \otimes \underline{H}^{2c}_Y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = F_Y \otimes (\mu_n)_Y^{\otimes -c}$

Spectral seq. $E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}^q_Y(F)) \Rightarrow H^{\cdot}_Y(X,F)$を使えば, $H^i = E_2^{i-2c,2c}$ つまり, $H^i_Y(X,F) = H^{i-2c}(Y, F_Y \otimes (\mu_n)_Y^{\otimes -c})$

特に, $F = \mu_{\ell^\nu}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$に適用する。その時, $H^i_Y(X,F) = H^{i-2c}(Y, F_Y \otimes \mathbb{Z}_\ell[-c])$と書ける。($F = \mu_{\ell^\nu}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}, \mu_{\ell^\infty}^{\otimes n}, \mathbb{Z}_\ell[n]$ ---) よってsingularityのresolutionを仮定すれば,

$$\mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \sum_{q \geqq p} \mathrm{Im}\,(H^{i-2q}(Z, F_Z \otimes \mathbb{Z}_\ell[-q]) \to H^i(X,F))$$

ここで, Zは proper lisse X-scheme, $\dim Z = \dim X - q$ (更に, Zは空でないopen setでimmersionであると仮定してもよい。)

3.2. $k=\mathbb{F}_N$：位数Nの有限体。$\bar{k}$：kのalgebraic closure
X：k上proper lisse irreducible $F=\mathbb{Z}_\ell$, $\bar{X}=X\otimes_k\bar{k}$ irreducible
$\bar{F}=F\otimes_k\bar{k}$とする。$G=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$は、second factorを通じて$H^i(\bar{X},\bar{F})$上に作用する。又、filtrationにも作用する。singularityのresolutionを仮定すれば、次の様に書き表わせる。

$\mathrm{Filt}^pH^i(\bar X,\bar F)=\sum_{q\geq p}\mathrm{Im}(H^{i-2q}(\bar Z,\mathbb{Z}_\ell[-q])\to H^i(\bar X,\mathbb{Z}_\ell))$ ここで、

$\bar Z$は、lisse, proper X-scheme Zからinduceされるscheme。

Gは、$\hat{\mathbb{Z}}$に同型で、topological generator frob_N (Frobenius automorph.)を持つ。Gの作用 $\Longleftrightarrow$ frob_Nの作用。

canonical isom. $H^j(\bar Z,\mathbb{Z}_\ell[-q])\cong H^j(\bar Z,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Z}_\ell[-q]$がある。
(但し、ここで右辺の$\mathbb{Z}_\ell[-q]=\varprojlim \mu_{\ell^\nu}^{\otimes -q}$, μ_{ℓ^ν}は1のℓ^ν乗根全体でGが作用している。isom.はGの作用もこめての意味。)

ところで、$k=\mathbb{F}_N$上、任意のscheme Xに対して、Frobenius morph. $F_X: X\to X$がある。(points上identity map, structure sheaf上 $f\mapsto f^N$) $G\ni\mathrm{frob}_N: x\mapsto x^N$。$H^j(\bar X,\mathbb{Z}_\ell)$上に、$F_X$と$\mathrm{frob}_N$は、互に逆に作用する事を注意すると、([ ] exposé 15 又は[8]) $\mathbb{Z}_\ell[1]$へのfrob_Nの作用は、N倍だから$\mathbb{Z}_\ell[-q]$へのF_Xの作用は、N^q倍である。Weilの予想 [1]
"$H^j(\bar Z,\mathbb{Z}_\ell)$に作用する$F_Z$の最小多項式は有理整係数、よってその根は代数的整数で更に絶対値は$N^{\frac{j}{2}}$である。" を仮定すれば、$\mathrm{Filt}^pH^i(\bar X,\mathbb{Z}_\ell)$への$F_X$の作用の固有値は、絶体

値 $N^{\frac{i}{2}-p}$ の代数的整数と N^p との積である。$H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)=H^i(\bar{X},\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$
$\mathrm{Filt}'^{p}H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$ を，N^p で割ると代数的整数になる数を，
Frobenius morph. F_X の固有値に持つ固有ベクトルから生成される $H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$ の subspace と定義する。

(*) $\quad \mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)\subset \mathrm{Filt}'^{p}H^i(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$

Tate 予想の一般化として，この inclusion が等号であると予想される。実際 $i=2p$ の時，次に見る様に，この予想は，Tate 予想と一致する。$\mathrm{Filt}^p H^{2p}(\bar{X},\mathbb{Z}_\ell)=\mathrm{Im}\,(H^{2p}_{\bar{Z}}(\bar{X},\mathbb{Z}_\ell[-p])\to H^{2p}(\bar{X},\mathbb{Z}_\ell))$ $=$ codim p の $\mathbb{Z}_\ell[-p]$-係数の alg. cycle の cohomology class から生成される submodule。(*) の両辺に $\mathbb{Q}_\ell[p]$ を tensor すると，左辺 $=$ codim p の alg. cycle の cohomology class から生成される subspace。右辺 $=$ 1 のべき根を F_X の固有値に持つ固有ベクトルから生成される subspace $\subset H^{2p}(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell[p])$，つまり，$r\gg 0$ F_X^r で invariant。 田原氏の話にもあるように，Tate [9] により，X が surface の場合
$Br(X)(\ell)$：有限 $\Longleftrightarrow$ Tate 予想（$NS(X)$ は，$NS(\bar{X})$ における $Pic(X)$ の image だから，$NS(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell=$ dim 1 の alg. cycle の cohomology class から生成される submodule）
又，Tate [10] により，X が 2 次元アーベル多様体又は曲線の直積の時，$Br(X)(\ell)$ は有限。よって Tate 予想は，正しい。

Pohlmann [7] は，Shimura-Taniyama の意味の CM-型のアーベル多様体に対して，Hodge 予想と Tate 予想とが同値になることを示している。

参考文献．

[1] S. Abhyankar, — Local Uniformization on algebraic surfaces over ground fields of ch≠0. Ann. of Math. 63 (1956)

[2] M. Artin et A. Grothendieck, — Cohomologie étale des schemas SGAA, 1963/64

[3] A. Grothendieck, — Cohomologie l-adique et fonctions L SGA 1964/65

[4] A. Grothendieck, — Le groupe de Brauer (Br) I, II, III Seminaire Bourbaki 290 (1965), 297 (1965) and mimeographed note of I.H.E.S. 1966

[5] H. Hironaka, — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of ch=0 Ann. of Math. 79 (1964)

[6] J. Igusa, — Betti and Picard numbers of abstract algebraic surfaces. Pro. Nat. Acad. Sc. 46 (1960)

[7] H. Pohlmann, — Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type Ann. of Math (1968)

[8] J. Tate, — Algebraic cycles and poles of zeta functions Arithmetical algebraic geometry (1965)

[9] J. Tate, —— On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. Seminaire Bourbaki 1965/66 exposé 306

[10] J. Tate, —— Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields, Inventiones math. 2 (1966)

[11] A. Weil, —— Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. math. Soc 55 (1949)

[12] O. Zariski, —— Algebraic surface.