数理解析研究所講究録
54巻 1968年 35-43

$SU_3(5)$ の特徴づけ

名大 理　原田耕一郎
（T.T.生　記）

中肉中背，やゝ円顔，まるいまなこ（炯々とかゞやく），まるいめがねをかけ，にこにこしながら黒板の前に立つ原田耕一郎氏から柔和なしかし若々しい空気がたゞよう。自称，他称して　小学校先生タイプ。にこにこしながらかんでふくめる様に話しかけられ　説明されると　だまっているのがわるいような気がして　そうだそうだ　とうなづいてしまう，というような進行をたどりながら，氏の話をきゝおえて　さて　小学生程にもよく理解出来たかと問われれば　いささか心もとないが，　とにかく　彼がとき明してくれたと思われることを記してみることにしよう。

1961年 R. Ree は Suzuki group が 単純 Lie algebra B_2 に対応する Chevalley group を 少し変形することによって得られることに注目して　それと類似

の方法により type G_2 の simple Lie algebra に関連して新しい有限単純群を発見した。（${}^2G_2$ で記し，以下においてRee group とよぶ。 Amer. Jour. Math., 83 (1961)）。

1963年 H.N. Ward は この Ree group ${}^2G_2$ を特徴づけようとして ${}^2G_2$ のもつ性質の中から 次の5つの性質をとりだし それらをみたす有限群 G を考へた。（Trans. Amer. Math. Soc., 121 (1966)）.

I. G の Sylow 2-subgroup は位数 8 の elementary abelian group である。

II. G は index 2 の normal subgroup をふくまない。

III. G の involution J で $C_G(J) = \langle J \rangle \times L$, $L \cong LF(2, q)$ なる性質をみたすものがある。 従って I より $q \equiv 4 + e \pmod 8$, $e = \pm 1$ である。

IV. $\langle R \rangle$ を L の order $q+e/2$ の cyclic subgroup とすると，$\langle R \rangle$ の任意の subgroup $\langle R_0 \rangle \neq \langle 1 \rangle$ の正規化群 $N_G(\langle R_0 \rangle)$ は $C_G(J)$ に入る。

V. J' を L の involution, S を L の order $q-e/4$ の元で $C_G(J')$ に入るものとする。 $\langle J, J' \rangle$ を normalize し，S と可換でない order 3 の元が 存在する。

この様な群 G は 現在 Ree type の group とよばれているがそれは Ward が 上記論文において，この群が Ree の

simple group ${}^2G_2$ に かなり近い性質をもつこと を示したことによっている。(たゞし Ree type の group が はたして Ree の group ${}^2G_2$ に一致するかどうかは open の様である。)

一方 Ree group の発見者 Ree は ${}^2G_2$ を置換群として特徴づけることを試みようとし, 1964年, 次の3つの条件をみたす群 G を考へた。(Can. Jour. 16., 1964)。

1). G は set Ω 上の2重可移群, こゝで $|\Omega| = m+1$, m は odd で $\geqq 3$.

2) $\Omega \ni \alpha, \beta\ (\neq)$ に対して G の α, β の stabilizer H は 3点以上を固定する non identity な元を唯一つふくむ。

3) すべての involution は少くも3点を固定する。

そして Ree はこの論文の中で これらの条件をみたす群は Ree type の group となることを証明している。(この Ree の論文を以下 [R] で記す。)

さて 原田氏は この Ree の定理の証明の中に少し不備な点のあることを指摘した (Proposition 2.3 in [R])。事実 $SU_3(5)$ が 1), 2), 3) の条件をみたすこと を注意し そして更に $SU_3(5)$ がその唯一つの例外であることを

明かにした。即ち 次の定理が成立つことを示した。

$\boxed{\text{定理}}$ 1), 2), 3) をみたす Ree type でない group は $SU_3(5)$ である。

こゝで $SU_3(5) = \{ A \mid \in GL(3, F),\ {}^t\!A\bar{A} = E,\ \det A = 1 \} / \text{center}$, $F = GF(5^2)$, $F \ni a$ に対して $\bar{a} = a^5$, $A = (a_{ij})$ に対して $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, である。（原田氏のこの仕事の背景には order の小さい 2-group を Sylow 2-group とする simple group をしらべるという一連の仕事（近藤氏などと一緒におこなっている）があるようで それらをしらべている過程において Ree のあやまりをみつけたもののようである。）

くわしいことは preprint 又は いずれ発表される 氏の論文を勉強することにして, 以下同氏ののべた"証明の概略"の概略（筋道）をたどることにしよう。

G を 1), 2), 3) をみたす群, B を Ω の 1 点 α の stabilizer, w を involution で $\alpha^w = \beta$ なるもの, H の unique involution を h_0, $H_0 = \langle h_0 \rangle$ とする。次の性質はわかっている。

a) $H^w = H$, $w h_0 = h_0 w$, $|G| = m(m+1)|H|$,

b) G の involution は single conjugate class をつくる。

c) $B \rhd^{\exists} U$, $|U| = m$, $(U, \Omega - \alpha)$ は regular,

d) $G = UH + UHwU$ で G の元は unique に uh 又は u_1hwu_2 とかける。$(u, u_1, u_2 \in U,\ h \in H)$。

e) $\forall p$ に対して H の Sylow p-group は cyclic。

f) $C(h_0)/H_0$ は Zassenhaus group で order $q(q+1)|H|/2$, こゝで $q = |C_U(h_0)|$。

g) $m = (qn+n+1)q$, こゝで n は Hw に入る involution の数。

先に問題として指摘された Proposition 2.3, [R], において Ree は $[H:H_0] = odd$ なることを主張しているが, $[H:H_0] = odd$ の仮定のもとには Ree の論文の残り, i.e. G が Ree type の group になること, は正しいようである。そこで $[H:H_0] = even$ と仮定する。まず

$\boxed{\text{オ1 Step}}$ では $C(h_0)$ の構造をきめる。

$C(h_0)/H_0$ が Zassenhaus group で H/H_0 が even order なることから $C(h_0)/H_0$ は Zassenhaus の結果 (Hamb. Abh., 11, 1936) により,

$$PSL(2,q),\ PGL(2,q),\ M_q$$

のいずれかに同型である。これから $C(h_0)$ の構造を決定するのであるが 上記の群の Schur multiplier, central extension についての Schur の結果 (J. reine angew. Math, 132, 1907) を用いることにより $C(h_0)$ は次の構造をもつ事がわかる;

（途中省略）

$$C(h_0) = \langle SL(2,q), U \rangle \subset GL(2,q^2)$$

こゝで $U = \begin{pmatrix} u^{2^{r-1}+1} & \\ & u^{2^{r-1}-1} \end{pmatrix}$，$u$ は $GF(q^2)$ の乗法群における order 2^{r+1} の元，$q-1=2^r s$，s odd，$r \geqq 2$．この構造はくわしくしらべることが出来，Sylow 2-group は order 2^{r+2} の semi-dehedral であること，又 involution の個数をしらべることにより $m = q^3$，即ち $|G| = 2(q-1)q^3(q^3+1)$，などもわかる。

$\boxed{\text{第2 Step}}$ は q の決定である。

$C(h_0)$ の構造がよくわかり，とくに G の Sylow 2-group が semi-dehedral であることがわかったことから，最近の R. Brauer の仕事を利用して G についての情報をうることが出来る。（J. of Algebra, 3, 1966)。そこでの Theorem (8A) を用いて G の principal 2-block に入る character の degree をすべてきめることが出来る。更にそこでの Theorem (9A) を用いて $q+1$ をわる odd prime p についての principal p-block，Sylow p-group，その normalizer などの構造をしらべることにより $p=3$，$q=5$ が出る（途中省略）。

$\boxed{\text{Final Step}}$ は G と $SU_3(5)$ とを identification する手つづきである。

さて G は

(1) degree 5^3+1 の doubly transitive group である,

(2) 1点の stabilizer B は regular normal subgroup U をふくむ,

(3) B／U は order 8 の cyclic group である,

をみたす群である。 一方 J. of Algebra, 2, 1965, で鈴木通夫さんが 3次元 Projective unitary group $U_3(q)=\{A \mid \in GL(3, q^2),\ A^t\bar{A}=E\}/\text{center}$ の characterization を行った。 それを（今必要としている）$q=5$ の場合にのべれば 次の結果である。

定理 G が上の條件 1), 2) 及び（3)の代りに）

(3′) B／U は order 24 の cyclic group である

をみたすならば G は $U_3(5)$ となる。

従って G が $SU_3(5)$ となることをいうには, G を normal subgroup としてふくむ群 G_1 で G の構造からの自然の拡張として (1), (2), (3′) をみたすものをつくることが出来ればよいことになる。 そのために, G の Sylow 5-group の構造とその Automorphism group の構造をうまく利用している。 即ち G の Sylow 5-group について,

(a) G の Sylow 5-group U は exponent 5 の non-abelian group,

(b) U の automorphism group Aut U の Sylow 2-group は $\cong Z_4 \int Z_2$,

(c) Aut U の order 8 の cyclic subgroup は $U/D(U)$, $D(U)$ 上に regular にはたらく order 24 の Aut U の cyclic subgroup にふくまれる, ($D(U)$ は Frattini subgr.),

を証明し, これをつかって次の様な G をふくむ集合 G_1 を考へる:

$$G_1 = U \cdot \langle h_1 \rangle + U \cdot \langle h_1 \rangle w U$$

こゝで h_1 は Aut U の order 24 の元で, $\langle h_1 \rangle$ が H をふくむものとし, $h_1^w = h_1^{-5}$ と定義する。しからば G_1 はあたえられた積 (i.e. G におけるそれを自然に拡張したもの) についてとぢていることがわかり, 且 G_1 は 1), 2), 3′) をみたすことがわかる。

エピローグ

一夕 岩堀さんをかこんでダベり会を行った。話が数学の仕方についてのことになり, 刀をとぐだけで切ろうとしない人が多いといった話がでたとき, 原田耕一郎氏曰く "僕の場合は刀のとぎ方がたらないようだ。ろくろくといでない刀でたたき切ってみてまだきれるまだきれると切っているような状態だ"。

(終わり)。

$\boxed{\text{後記}}$ Princeton の研究所に行かれた原田氏からの便りによると，Princeton で会った Gorenstein が最後の部分 $\cong U_3(5)$ の証明に誤りを発見したので，この部分は取り消される由です。従って問題の群が $U_3(5)$ に限るか否かは，未解決のようです。（1968－10－10　岩堀記）