数理解析研究所講究録
54巻 1968年 2-11

B群について

(金沢稔氏講演)

上智大 理工 横沼健雄

1.

B群(Burnside 群)の起りは，Burnside の次の定理である．[2, p. 343]：p を素数，$n = p^m$ ($m > 1$) とする．n 次の置換群 G が長さ n の cycle を含めば，G は二重可遷か，又は imprimitive である．この定理に於て，"長さ n の cycle" を，別のものでおきかえても定理が成立するかが問題であった．そのような性質をもつものを，B群とよぶ．即ち，有限群 H (位数 $= n$ とおく) が，B群であるとは，

(B) $\left\{\begin{array}{l}\text{H の正則表現を可遷部分群として含む，n 次の}\\ \text{primitive 置換群は，二重可遷である．}\end{array}\right.$

いま，G を置換群とし，そのとき自然にきまる置換表現 ρ を考える．ρ を，G の既約表現の直和に分解するとき，G の置換群としての性質が，この分解にどのように反映するかを考える．たとえば，二重可遷性がよい例である．Burnside の

証明は，長さnの cycle の生成する群をHとしたとき，各既約成分のHへの制限を考え，1の原始p^m乗根のある性質を用いて，Gが primitive ならば，二重可遷であることを導びいている．彼は，同じ方法で，elementary abelian 以外の可換群が B群であることを示そうとしたが([3])成功しなかった．実際これは，反例が示された．([7]) 一方，Schur([9])は，ρの既約表現分解を考察する為に，ρの commutor algebra から出発した．そして特に，Gが regular subgroup Hを含む場合には，GはH上に作用すると考えることが出来，この場合の commutor algebra の考察から，後述する S-ring（の原型）の概念をえた．Gの二重可遷性，primitivity は，S-ring の性質として記述される．これを用いて，位数が素数でない巡回群は，B群であることを示した．後，Wielandt([11],[12])は，Schur の論法を整理し，ある Sylow 群が巡回群であるような，位数が素数でない可換群([11])，dihedral group([12])が B群であることを示した．彼は，$\mathbb{Z}$上の群環の部分環として，S-ring を定式化しまた，非可換群にも有効に用いられることを示した．他に，次の群が B群であることが知られている．

* Type(p^a, p^b) $(a>b)$の可換群（Manning [7]，Kochendörffer [6]）.

★ ある奇素数 p に対し，p-Sylow 群が，Type (p^a, p^b) $(a>b)$ の可換群である，可換群（Bercov [1]）.

★ generalized quaternion group（Scott [10]）.

1961年永井氏は，S-ring を用いずに，p を，$2\cdot 3^a+1$ $(a>2)$ なる形の素数としたとき，位数 $3p$ の非可換群 H が，B 群であることを示された（[8]）．方法は直接，置換表現 ρ の分解をしらべるもので，G を，H を regular subgroup として含む $3p$ 次の primitive 置換群とすると，G の p-Sylow 群は，次数 p，かつその centralizer に一致するので，このような群の表現に関する Brauer の定理を用いて，ρ の分解をしらべ，二重可遷でないならば，$a \leqq 2$ を導びいている.

なお，単純群は，$\mathbb{Z}_2$ をのぞいて，B群ではない.（[9]）

金沢氏の講演は，新たに，B群の例を与えるもので，次の定理を紹介された.

<u>定理</u>. H を，位数 2^{n+2} $(n \geqq 2)$ の semi-dihedral group i.e. 基本関係 $x^{2^{n+1}} = y^2 = e$，$y^{-1}xy = x^{2^n-1}$ を満たす二元 x, y で生成された群，とすると，$n \geqq 3$ ならば，H は B 群，$n = 2$ ならば，B 群でない.

彼は，Wielandt の dihedral group の場合の方法が，この場合にも有効につかえることに着目したものである．$n = 2$ の場合，反例として，$\mathfrak{S}_4 \wr \mathbb{Z}_2$（4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の，$\mathbb{Z}_2$ による，

wreath 積，がある．

2.

先ず，S-ringについて述べる．

Hを群とし，Hの分割 $H = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ が次の条件を満すとき，S-分割であるという．

(S-1) $(K_1^{-1}, \cdots, K_r^{-1})$ は，$(K_1, \cdots, K_r)$ の置換であり，ある K_i は，Hの単位元eのみよりなる．

(S-2) $\tau_i = \underline{K_i}$（一般に，$H \supset K$ に対し，$\underline{K}$ で群環の元，$\sum_{k \in K} k$ をあらわす．）とおいたとき，$\tau_1, \cdots, \tau_r$ ではられる $\mathbb{Z}$-module は，$\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}H$ の部分環である．

任意のS-分割に対し，（S-2）で定義される $\mathbb{Z}H$ の部分環を，H上のS-ringとよぶ．実例をあげよう．

1) Gを集合Ω上の置換群とし，HをΩ上 regular なGの部分群とする．G_1 を，Ωの一点の stabilizer とする．このとき，Hの同値関係 $h \sim h'$ $(h, h' \in H)$ を，$G_1 h G_1 = G_1 h' G_1$ で定義すると，この関係〜による同値類は，S-分割を与える．

2) $K_1 = \{e\}$，$K_2 = H - \{e\}$．対応するS-ringを，trivial S-ringとよび，$\mathfrak{W}_0$ であらわす．

H上のS-ring $\mathfrak{W}$ は，$\underline{K} \in \mathfrak{W}$ なる部分群Kが，Hと $\{e\}$ とに限るとき，primitive S-ring とよばれる．

実例1）に於て定義されるS-ringを$\mathcal{W}$とすると，

$$\begin{cases} G : \text{primitive} & \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} : \text{primitive} \\ G : \text{二重可遷} & \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \end{cases}$$

が成立し，置換群の性質が，S-ringの性質に反映する．これにより，群HがB-群である為の一つの十分条件として，

"H上のprimitive S-ringは，trivial S-ringに限る"

がえられる．（必要条件かどうかは，未解決のようである．）

S-ringの基本的な性質は例えばWielandt [13] に出ているが，Schur-Wielandtによる次の定理は以下で有用である．

<u>定理</u>　Hを群，Aをその巡回部分群とし，Aの位数をaとする．$\mathbb{Z}H$の任意の元$\sigma = \sum_{h \in H} a_h h$に対し，

$$\sigma_A = \sum_{h \in A} a_h h \quad , \qquad \sigma_{H-A} = \sum_{h \in H-A} a_h h$$

とおく．$\mathcal{W}$を，H上のS-ringとして，次の条件を満すものとする．

1）$\mathcal{W} \ni \sigma$，$\sigma_A = 0$ ならば，$\sigma = 0$．

2）任意の$\sigma \in \mathcal{W}$に対し，$\sigma_A \cdot \sigma_{H-A} = \sigma_{H-A} \cdot \sigma_A$．

3）任意の$\sigma \in \mathcal{W}$に対し，pを，$(p, a) = 1$なる素数とすると，

$$((\sigma_{H-A})^p)_A \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}H}.$$

bを，$(b, a) = 1$なる正整数とすると，任意の$\sigma \in \mathcal{W}$に対

し，$\sigma_A = \sum_{h \in A} a_h h$ とおくとき，$\mathfrak{V}$ の元 $\sigma^{(\beta)}$ であって，$(\sigma^{(\beta)})_A = \sum_{h \in A} a_h h^{\beta}$ なるものが一意的に存在する．対応 $\sigma \mapsto \sigma^{(\beta)}$ によって，$(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$（= 商環 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ の unit group）は，$\mathfrak{V}$ に自己同型群として作用し，かつ固定元の全体 $\mathfrak{V}'$ が又 S-ring になる．しかも，a が偶数ならば，$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}_0$ より，$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ をうる．

注意．$[H:A] = 2$ ならば，最後の命題に於て，"a が偶数" なる制限は不要．（cf. Wielandt [12]）

3．

$n > 2$ の場合の主定理の証明を述べる．詳細は，[5] 参照

H を，前述の基本関係を満す二元 x, y より生成された，semi-dihedral group とし，$A = \langle x \rangle$（$= x$ で生成された部分群），$B = \langle x^2 \rangle$，$z = x^{2^n}$ とおく．H の B に関する coset 分解 $H = B \cup xB \cup xyB \cup yB$ に対応して，$\mathbb{Z}H$ の元 σ を，$\sigma = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)} + \sigma_{(4)}$ と書く．（i.e. $H \supset K$ に対し，$\sigma_K = \sum_{h \in K} a_h h$，ただし $\sigma = \sum_{h \in H} a_h h$，とおき，$\sigma_{(1)} = \sigma_B$，$\sigma_{(2)} = \sigma_{xB}$，$\sigma_{(3)} = \sigma_{xyB}$，$\sigma_{(4)} = \sigma_{yB}$ とおく．）$\sigma = \sum_{h \in H} a_h h$ に対し，$\sigma^* = \sum_{h \in H} a_h h^{-1}$，$S(\sigma) = \{h \in H ; a_h \neq 0\}$ とおく．$\mathfrak{V}$ を，H 上の primitive S-ring とする．$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ を示すのが目的である．次の補題 1 が出発点となる．

補題 1．$\sigma \in \mathfrak{V}$ とする．$\sigma = \sigma^*$，$z\sigma_{(4)} = \sigma_{(4)}$ ならば，

3

$\sigma \in \mathfrak{A}_0$.

証明は，σ^2にあらわれるAの元をしらべ，σには，hとhz（$h \in A$, $h \neq e, z$）とが同じ係数であらわれることをみちびく．$\mathfrak{A}$のprimitivityより，$\sigma \in \mathfrak{A}_0$をうる．

これを用いて，$\tau_1, \cdots, \tau_r$を，$\mathfrak{A}$の一つのbasisとしたとき，全てのiに対して，$\tau_i = \tau_i^*$が成立することが示され，$\mathfrak{A}$の全ての元σに対して$\sigma^* = \sigma$，特に$\mathfrak{A}$が可換であることがわかる．（$\tau_i = \tau_i^*$を満すτ_i達の和をσとおくと，補題1の条件をみたす．）また，σを$\mathfrak{A}$のsimple element (i.e. $\sigma = \sum a_h h$とかくとき，$a_h = 0$ 又は 1)（$\sigma \neq 0$）かつ，$z\sigma_{(i)} = \sigma_{(i)}$（$i = 1, 2$）とすると，補題1より，$\sigma^2 \in \mathfrak{A}_0$，これから$\sigma = \underline{H}$がえられる．（このとき，$n \geqq 3$を用いる）

2.に述べた定理を，Hの巡回部分群A及びBに用いる．まず

$$\mathfrak{A}_1 = \{ \sigma \in \mathfrak{A} ; \quad z\sigma_{(2)} = \sigma_{(2)} \}$$

とおくと，$\mathfrak{A}_1$もまたH上のprimitive S-ringであることがわかり，さらに$\mathfrak{A}_1$は，部分群Aに関して，定理の条件1) 2) 3)を満すことが示される．従って，$(\mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z})^*$が作用するが，補題1の後の注意を用いると，固定元のつくるS-ringが，trivialであることがわかり，$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0$をうる．

一方，$\mathfrak{A}$は，部分群Bに対して定理の条件を満足するから

，$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ が作用する．従って，固定元のつくる S-ring $\mathfrak{A}'$ に対して，$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}_0$ を示せばよいのであるが，$\mathfrak{A}'\neq\mathfrak{A}_0$ とすると，$S(\sigma)\ni e, z$ なる *simple element* $\sigma(\neq 0)\in\mathfrak{A}'$ が存在することになる．このとき $\sigma^2\in\mathfrak{A}_1$ であり，上述の結果 $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_0$ を用いると，群環 $\mathbb{Z}H$ に関する次の補題2より矛盾となる．

<u>補題2</u>．次の条件 1)～4) を同時に満す $\mathbb{Z}H$ の元 σ は存在しない．

1) σ は，*simple element*．

2) $\sigma^2=a\cdot e+b\cdot\underline{H}$ $(a, b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0)$．

3) $S(\sigma_{(i)})$ は，集合 $S_i=\{x^{2^i g}$；g：奇数$\}$ のいくつかの和．

4) $S(\sigma_{(1)})\ni e, z$．

4．

榎本氏は，その後，基本関係 $x^{2^{n+1}}=y^2=e$，$y^{-1}xy=x^{2^n+1}$ を満す二元，x, y で生成される群 H についても，$n\geqq 3$ ならば，B群，$n=2$ ならば B群でないことを証明し，既知の結果と合わせて，指数2の巡回部分群をもつ2群については，B群か否かの決定がなされたことを注意した．([4]) 論法は，*semi-dihedral* の場合と似たもので，$\mathfrak{A}$ を，H 上の *primitive* S-ring としたとき，$C=\langle x^2\rangle$ に関して，2. の定理の条件が満たされ，従って，$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ の固定元 $\mathfrak{A}'$ について，$\mathfrak{A}'$

$=\mathfrak{A}_0$，を示す．$\mathfrak{A}$ の可換性の証明は，直接 $\mathfrak{A} \ni \sigma, \tau$ に対し，$\rho = \sigma\tau - \tau\sigma$ を計算し，$\rho z = -\rho$ （$z = x^{2^n}$）より，$\rho = 0$ を導びく．従って，$\mathfrak{A} \ni \sigma$ に対し，$\sigma^* = \sigma$ と仮定して証明すればよいことになる．

$n = 2$ の場合は，G として，5次の置換行列の群と，成分が ± 1，(-1) が偶数個の，5次対角行列の群との半直積（(D_5) 型の，複素単純 Lie 環の Weyl 群）をとり，

$$x = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$H = \langle x, y \rangle$ で，G が反例を与える．

参考文献

[1] R. D. Bercov, *The double transitivity of a class of permutation groups*, ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1962.

[2] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 1911.

[3] ——, *On certain simply transitive permutation groups*, Proc. Cambridge. Phil. Soc., 20 (1921), 482–484.

[4] H. Enomoto, to appear, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968).

[5] M. Kanazawa - H. Enomoto, On B-group's properties of semi-dihedral group, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968).

[6] R. Kochendörffer, Untersuchungen über eine Vermutung von W. Burnside, Schr. Math. Sem. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin, 3 (1937), 155–180.

[7] D. Manning, On simply transitive groups with transitive abelian subgroups of the same degree, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 324–342.

[8] O. Nagai, On transitive groups that contain non-abelian regular subgroups, Osaka M.J. 13 (1961), 199–207.

[9] I. Schur, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen, S. B. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl., 1933, 598–623.

[10] W. R. Scott, Solvable factorizable groups, Ill. J. Math., 1 (1957), 389–394

[11] H. Wielandt, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen, Math. Zeit., 40 (1935), 582–587.

[12] ——, ——, II, Math. Zeit., 52 (1949), 384–393.

[13] ——, Finite Permutation groups, 1964.

以上.