数理解析研究所講究録
55巻 1968年 107-114

On positive contraction semi-groups

都立大 理　長谷川 実

§1.　以下取り扱う作用素はすべて線形作用素とする。

正の縮少作用素より成る半群（略してPC半群）$\Sigma = \{T_t ; t \geq 0\}$ を Banach 束 X 上で考える。$\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{T}_t ; t \geq 0\}$ を他のPC半群としたときに

$$\widetilde{T}_t x \geq T_t x \qquad (x \geq 0,\ t \geq 0)$$

が成り立つならば $\widetilde{\Sigma}$ は Σ を dominate するという。

Markov 過程論における研究を背景として G.E.H. Reuter [1] は 次のような問題を 抽象L空間Xにおいて考えた：

(*) 与えられたPC半群 Σ に対して これを dominate するPC半群 $\widetilde{\Sigma}$ を構成すること。

この論文 [1] に 次の結果が得られている。

<u>定理 1·a</u>　稠密な定義域を持つ作用素 A が PC半群の生成作用素であるための条件は

(1)　　$(e, Ax) \leq 0 \qquad (x \geq 0,\ x \in D(A))$

ここで　$(e, x) \equiv \|x^+\| - \|x^-\|$,

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して　正の解作用素 $R(\lambda; A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$ が X 上に存在する。

<u>定理 1·b</u>　　A を与えられた PC 半群 Σ の生成作用素とする。$\tilde{A}$ を $D(\tilde{A}) = D(A)$ なる作用素とすると　これが Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1)　　$(e, \tilde{A}x) \leq 0$　　　　$(x \geq 0,\ x \in D(A))$,

(2)　　$\tilde{A}x \geq Ax$　　　　$(x \geq 0,\ x \in D(A))$,

(3)　定理 1·a の条件 (2) において A を $\tilde{A}$ で置き換えたもの。

特に

$$A_z x \equiv Ax - (e, Ax)z \qquad (z \geq 0,\ 0 < \|z\| \leq 1)$$

は Σ を dominate する PC 半群 Σ_z の 生成作用素となる。

これに続いて I. Miyadera [2] は次の結果を得た（記号を上記の通りにする）:

<u>定理 2·b</u>　　A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1)
　} 定理 1·b に同じ,
(2)

(3)　次の二つの条件のいずれかをみたすこと;

i)　$(I - (\tilde{A} - A)R(\lambda; A))X = X$　　　$(\lambda > 0)$,

ii)　$\sum_{k=0}^{\infty} \|\{(\tilde{A} - A)R(\lambda; A)\}^k x\| < \infty$　　$(\lambda > 0,\ x \geq 0)$.

また　この論文 [2] では上記 Σ_z と異なる形の Σ を dominate する P C 半群の例が得られている。

この問題 (*) を任意の Banach 束 X 上で考えよう。このために R.S. Phillips [3] による吉田－Hille の定理の一つの変形を与える。

定理 3.a　稠密な定義域を持つ作用素 A が P C 半群の生成作用素であるための条件は

(1)　$[Ax, x^+] \leq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2)　$(I - A)D(A) = X$.

ここで $[x, y]$ は特別な半スカラー積である，即ち $X \times X$ 上の次の条件をみたす実数値関数である：

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z] \ , \quad [\lambda x, y] = \lambda [x, y]$$

$$[x, x] = \|x\|^2 \ , \quad |[x, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\| ,$$

$$[x, y] \geq 0 \quad (x, y \geq 0) \ , \quad [x, x^+] = \|x^+\|^2 .$$

A. Olubummo [4] はこの定理を用いて Reuter－Miyadera の結果が一般の Banach 束 X 上で成り立つことを示した。

定理 4.b　A を与えられた P C 半群 Σ の生成作用素とする。A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ が Σ を dominate する P C 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1)　$[\tilde{A}x, x^+] \leq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2)　$\tilde{A}x \geq Ax \qquad (x \geq 0 , \ x \in D(A))$,

(3) $\quad (I - (\tilde{A} - A)R(\lambda ; A))X = X \qquad (\lambda > 0)$。

ここで $B = \tilde{A} - A$ が X 上の有界作用素に拡張されるとき条件(2)は不要である。

§2. ここでは定理1.b, 2.b, 4.b における条件(2)の持つ役割について考えたい[5]。Banach束 X が次の条件をみたすものと仮定する：

正の単調増加列 $\{x_n\}$ が

$$\sup_n \|x_n\| < \infty$$

をみたすならば ある $x_0 \in X$ が存在して $\lim \|x_n - x_0\| = 0$ が成り立つ（例えば 小笠原藤次郎 束論II）。

<u>定理5.b</u> A を与えられたPC半群 Σ の生成作用素とする。A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ またはその閉包が Σ を dominate するPC半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1) $\quad [\tilde{A}x, x] \leqq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2) $\quad \tilde{A}x \geqq Ax \qquad (x \geqq 0,\ x \in D(A))$。

この定理の証明の要約を記す。$B \equiv \tilde{A} - A$ とし

$$A_{n,\lambda} \equiv A + (n - \lambda)BR(n ; A) \qquad (n \geqq \lambda),$$

$$B_{n,\lambda} \equiv A_{n+1,\lambda} - A_{n,\lambda}$$

$$= BR(n+1 ; A)(\lambda - A)R(n ; A) \qquad (n \geqq \lambda)$$

とおく。ここで $\sup_{n,\lambda} \|B_{n,\lambda}\| \leq L$ に注意しておく。

もし正の解作用素 $R(\lambda; A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が存在したとすると、$\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda})$ は縮小作用素であることを示そう。任意の $x \geq 0$ に対して

$$\lambda \| R(\lambda; A_{n,\lambda}) x \|^2$$

$$= [\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda}) x, R(\lambda; A_{n,\lambda}) x]$$

$$\leqq [(\lambda - \tilde{A}) R(\lambda; A_{n,\lambda}) x, R(\lambda; A_{n,\lambda}) x]$$

$$= [x, R(\lambda; A_{n,\lambda}) x]$$

$$- [BR(n; A)(\lambda - A) R(\lambda; A_{n,\lambda}) x, R(\lambda; A_{n,\lambda}) x]$$

$$\leqq [x, R(\lambda; A_{n,\lambda}) x]$$

$$\leqq \|x\| \|R(\lambda; A_{n,\lambda}) x\|$$

これより任意の $x \in X$ に対して $\|\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda}) x\| \leqq \|x\|$ を得る。

次に正の解作用素 $R(\lambda; A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が $\lambda > L$ に存在することを n に関する帰納法を用いて示そう。$R(\lambda; A_{n,\lambda})$ の存在をある $n \geq \lambda > L$ に対して仮定すると

$$\| B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda}) \| \leqq \frac{1}{\lambda} \|B_{n,\lambda}\| \|\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda})\| < 1$$

より

$$R(\lambda; A_{n+1,\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda; A_{n,\lambda}) \{ B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda}) \}^k$$

となり、しかも $B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda})$ が正であることから

$$R(\lambda; A_{n+1,\lambda}) x \geq R(\lambda; A_{n,\lambda}) x \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

を得る。また Banach束 X に対する仮定から

$$\lim_{n,n'\to\infty} \| R(\lambda;A_{n,\lambda})x - R(\lambda;A_{n',\lambda})x \| = 0$$

を得る。次に

$$R(\lambda-\mu;A_{n,\lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} R(\lambda;A_{n,\lambda})^k \qquad (|\mu|<\lambda)$$

に注目すると，$\{R(\lambda';A_{n,\lambda})x\}$ $(|\lambda'|<\lambda)$ も n に関する Cauchy 列となり，$\lambda' R(\lambda';A_{n,\lambda})$ $(0<\lambda'<\lambda)$ は正の縮少作用素である。

$$\widetilde{R}(\lambda;A_k)x = \lim_{n\to\infty} R(\lambda;A_{n,k})x \qquad (x\in X)$$

とおく。$\{\widetilde{R}(\lambda;A_k);\ \lambda\leqq k\}$ は

(1) $\widetilde{R}(\lambda;A_k)-\widetilde{R}(\lambda';A_k)=(\lambda'-\lambda)\widetilde{R}(\lambda;A_k)\widetilde{R}(\lambda';A_k)$ $(\lambda,\lambda'\leqq k)$,

(2) $\lambda\|\widetilde{R}(\lambda;A_k)\| \leqq 1$

(3) $\widetilde{R}(\lambda;A_{k'}) = R(\lambda;A_k)$ $(\lambda<k<k')$

をみたすことがわかる。よって

$$\widetilde{R}(\lambda) \equiv \widetilde{R}(\lambda;A_k) \qquad (\lambda\leqq k)$$

とおけば　$E=\lambda I-\widetilde{R}(\lambda)^{-1}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\widetilde{\Sigma}$ の生成作用素であり，E は $\widetilde{A}$ の閉拡張になっている。逆は明らかである。

この証明において X に関する仮定は重要な役割を持っていて　この方法では一般の Banach束においてこの証明をそのまま使うことは出来ない。一般の Banach束における定理5.6 に対応する結果についての議論はまだ出されていないようであ

る。最後にこの定理における条件(1)は $X \times X$ 上の実数値関数 $\tau(x, y) = \lim_{a \to 0+} a^{-1}(\|x + ay\| - \|x\|)$ によって

$$(1') \qquad \tau(x, \widetilde{A}x) \leqq 0 \qquad (x \in D(\widetilde{A}))$$

で置き換えられることに注意する(M. Hasegawa, On contraction semi-groups and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan 18(1966), 290-302)。また定理3.a，4b における条件(1)もそれぞれ

$$(1') \qquad \tau'(x^+, Ax) \leqq 0 \qquad (x \in D(A))$$

$$(1') \qquad \tau'(x^+, \widetilde{A}x) \leqq 0 \qquad (x \in D(\widetilde{A}))$$

で置き換えられる。ここで

$$\tau'(x, y) = \frac{1}{2}\{\tau(x, y) - \tau(x, -y)\}.$$

佐藤健一氏の On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices (to appear) にこの方面に関する新しい結果が見られる。

文　献

[1] G. E. H. Reuter, A note on contraction semi-groups, Math. Scand. 3(1955), 275-280.

[2] I. Miyadera, A note on contraction semi-groups of operators, Tôhoku Math. J. 11(1961), 679-698.

[3] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction

operators, Czechoslovak Math. J. 12 (1962), 294–313.

[4] A. Olubummo, A note on perturbation theory of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1964), 818–822.

[5] M. Hasegawa, On the convergence of resolvents of operators, Pacific J. Math. 21 (1967), 35–47.