数理解析研究所講究録
55巻 1968年 87-96

Fourier 級数と作用函数について

東北大 理　宇野喜和

§1.

Gを局所コンパクトな可換無限群，Γをその指標群とする。

定理1. Fを$[-1, 1]$で定義された函数とする。

(i) Fが$A(\Gamma)$で作用するとき，ΓがディスクリートならFは原点の近傍で解析的で且$F(0)=0$である。又，ΓがディスクリートでないならFは$[-1, 1]$で解析的で，更にΓがコンパクトでなければ$F(0)=0$。

(ii) Fが$B(\Gamma)$で作用するとき，もしΓがコンパクトでないならFは複素平面上の整函数に拡張できる。

この結果は，Helson, Kahane, Katznelson and Rudin [2] により示された。証明は，例えば(i)で $G=\mathbb{T}$ のとき，定数 $\delta>0$ と $C<\infty$が存在して，$\hat{\sigma}\in B(\Gamma)$ が実数値をとり，$\|\sigma\|<\delta$ ならば $F(\hat{\sigma})\in B(\Gamma)$ で且 $\|F\circ\sigma\|<C$ となる。従って，Fは$(-\delta, \delta)$で連続となり，$F_1(s)=F(r\sin s)$とおく

と，但し $0<r<\delta/e$，F_1 は Fourier 級数 $\sum c_n e^{ins}$ に展開され，$\hat{\mu}\in B(\Gamma)$ が実数値をとり，$\|\mu\|=1$ なら，$|c_n|\,\|e^{in\mu}\|\leq C$ となる。このような測度で $\|e^{in\mu}\|=e^n$ なるようなものがあれば $|c_n|\leq Ce^{-n}$ となり，F_1 が $|\mathrm{Im}\, z|\leq 1$ で解析的な函数に拡張されることが分る。従って，F の原点の近傍での解析性がいえる。ところで P を G の独立なコンパクト集合とするとき，$Q=P\cup(-P)$ に台をもつ非負な連続測度に対して $\|e^{i\mu}\|=e^{\|\mu\|}$ が成り立つ。

§2.

$A^p(\mathbb{Z})=\{\hat{f}\,;\, f\in L^p(\mathbb{T})\}$ とおくとき，Rudin [9] は，$p>1$ に対して $A^p(\mathbb{Z})$ で作用する函数について調べている。

定理2. $1<p\leq 2$, $1\leq r\leq 2$, $1/p+1/q=1$, $1/r+1/s=1$ とする。今，原点の近傍である定数Kが存在して $|F(z)|\leq K|z|^{q/r}$ ならば $\hat{f}\in A^p(\mathbb{Z})$ に対して常に $F(\hat{f})\in A^s(\mathbb{Z})$ となる。

この定理から F が $A^p(\mathbb{Z})$ $(p>1)$ で作用するための十分条件が分る。一方，F が偶函数で $A^p(\mathbb{Z})$ $(p>1)$ で作用するためには，原点の近傍で $|F(z)|\leq K|z|^{2/q}$ なることが必要である。ところで，$p\geq 2$ の場合に Rider [7] がこの結果を完全にした。

定理3. F が $A^p(\mathbb{Z})$ $(p\geq 2)$ で作用するための必要且十分

条件は、原点の近傍で $F(z)=c_1 z + c_2 \overline{z} + b(z)|z|^{2/8}$ とかかれることである。ここに c_1, c_2 は定数で $b(z)$ は有界な函数である。

更に、Rudin [10] は $A_p(\mathbb{T}) = \{ f \in L^1(\mathbb{T})\ ;\ \hat{f} \in L^p(\mathbb{Z}) \}$ とおくとき、次のことを示している。

定理4. F を $[-1,1]$ で定義された函数とし、$f \in A_1(\mathbb{T})$ の値域が $[-1,1]$ に含まれるとき常に、ある p ($1<p<2$) に対して $F(f) \in A_p(\mathbb{T})$ ならば、F は $[-1,1]$ で解析的である。

証明は定理1の場合と殆ど同様だが、F の連続性を示すところが異る。この定理より $1<p<2$ に対して $A_p(\mathbb{T})$ で作用する函数は $[-1,1]$ で解析的である。

又、$0<p<1$ に対しては、Marcinkiewicz [6] の方法により、G_p を開区間 I で定義され、I に含まれる各閉区間 I' 上で $|F^{(n)}(x)| \leq B n^{n/p}$, ここに $F^{(n)}(x)$ は F の n 次導函数で且 B は定数、なるような函数の族とすると、$F \in G_p$ は $A_p(\mathbb{T})$ で作用することが分る。Riviere and Sagher [8] はその逆を述べている。

定理5. F が I で定義され、$0<p\leq 1$ とする。$f \in A_p(\mathbb{T})$ の値域が I に含まれるときある s ($0<s<2$) に対して $F(f) \in A_s(\mathbb{T})$ となるならば、$F \in G_p$ である。

xに対しては $F(z+z')-F(z)$, $\eta(x)=0$ なるxに対しては0となる．従って $\eta(x)=1$ なる x に対し $f(x)=1$, $\eta(x)=0$ なるxに対し $f(x)=0$ なる適当な函数 $f(x)$ をとれば $F_z(z'\eta)(x) = f(x)\{F(z+z')-F(z)\}$ とかくことができる。補題2より，$A\{F_z(z'\eta)\} \geqq |F(z+z')-F(z)| \log a/\varepsilon$。従って$F$は$z$の近傍で有界である。

(III). 各複素数zに対して，定数 $\alpha_z'>0$, $M_z'<\infty$ と区間I_z'が存在して，$A(f) \leqq \alpha_z'$, $\operatorname{supp} f \subset I_z'$, $|z'| \leqq \alpha_z'$ ならば，$A\{F_{z+z'}(f)\} \leqq M_z'$.

これが成立しないとすると，函数列 $\{f_k\} \subset \mathfrak{A}(T)$ と複素数列 $\{z_k\}$が存在して，$A(f_k) \leqq 1/k^2$, $\operatorname{supp} f_k \subset I_k$, 且 $|z_k| \leqq A(\eta_k)/k^2$ でしかも $A\{F_{z+z_k}(f_k)\} \geqq k\, 2^{k/2}$ となる．そこで $f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k$ とおくと，$A(f)<\infty$。ところで $\xi_k F_z(f) = F_{z+z_k}(f_k) + \xi_k\{F(z_k+z)-F(z)\}$ となる。従って，補題1と3から，$A\{F_{z+z_k}(f_k)\} \leqq A\{F_z(f)\} + M\{F_z(f)\}2^{k/2} + M\cdot|F(z_k+z)-F(z)| \log 2^k$。一方(II)より $F(z_k+z)-F(z)$ は有界であるから，これは矛盾である。

(IV). 各複素数zに対して，Fはzのある近傍で Lipschitz 条件をみたす。

補題1の $\eta(x)$ の aをεが $0<\varepsilon<a/2$ なるとき常に $\operatorname{supp}\eta \subset I_z'$ となるようにとる。そして $|z'| \leqq \alpha_z'$ で且 $|z'-z''|$

$\leqq \alpha_z'/M \log 2/a$ とするならば ε $(0<\varepsilon<a/2)$ を．$\alpha_z = |z'-z''|\cdot M\cdot \log 1/\varepsilon$ なるようにとることができる。この a と ε によってきまる $\eta(x)$ を考える。補題1より分ることは．$A\{(z'-z'')\eta\} \leqq |z'-z''|\cdot M\cdot \log 1/\varepsilon = \alpha_z'$。従って (III) から．
$M_z' \geqq A[F_{z+z'}\{(z''-z')\eta\}] = A[F\{(z''-z')\eta + z + z'\} - F(z+z')]$
となる。然るに $f(x)$ を，$\eta(x)=1$ なる x に対して $f(x)=1$，$\eta(x)=0$ なる x に対して $f(x)=0$ なる適当な函数とすれば．
$F\{(z''-z')\eta(x)+z+z'\} - F(z+z') = f(x)\{F(z''+z) - F(z+z')\}$
とかける。従って補題2から．$M_z' \geqq |F(z''+z)-F(z+z')|\cdot A(f) \geqq |F(z''+z)-F(z+z')| \log a/\varepsilon \geqq |F(z''+z)-F(z+z')|\cdot M_a\cdot \log 1/\varepsilon \geqq M_a |F(z''+z)-F(z+z')|/|z'-z''|$。ここに M_a は a に関係する定数である。これより (IV) が従う。

この (IV) から定理は直ちに従う。

§4.

前節よりもう少し一般な空間を考える。$1 \leqq \beta \leqq 2$，$3\beta/2-1 > \delta > \beta/2-1$ として $A_{\beta,\delta}(f) = [\int_0^1 t^{-2+\beta/2-\delta}\{\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^2 dx\}^{\beta/2} dt]^{1/\beta}$ とおく。そして $\mathfrak{A}_{\beta,\delta}(T) = \{f : A_{\beta,\delta}(f) < \infty\}$ とする。

定理7．[12]．$1 \leqq \beta \leqq 2$，$3\beta/2-1 > \delta > \beta/2-1$ とするとき．

(i) $1-\beta+\delta>0$ ならば．函数 F が $\mathfrak{A}_{\beta,\delta}(T)$ で作用するための必要且十分条件は．F が局所 Lipschitz 条件を満たすことで

ある。

(ii) $1-\beta+\delta=0$ ならば、函数Fが $\mathfrak{A}_{\beta,\delta}(\mathbb{T})$ で作用するための必要条件は、Fが局所 Lipschitz 条件をみたすことである。更に $\beta=1$ ならそれは十分条件でもある。

(iii) $1-\beta+\delta<0$ ならば、函数Fが $\mathfrak{A}_{\beta,\delta}(\mathbb{T})$ で作用するための必要且十分条件は、Fが Lipschitz 条件をみたすことである。

必要性の証明は (i), (ii) の場合は§3と同様にできる。又 (iii) は猪狩先生が§3のと同じ論文で $\beta=2$ のときに証明されているが、その方法によってこの場合も示せる。

§5.

ある一個の函数の作用函数について Malliavin [5] の結果がある。

定理8. $I=[-l,l]$ $(l>0)$, $\varepsilon>0$, 数列 $\{M_n\}$ を $\log M_n$ が n の凸な数列になり, $(\log M_n-\log n!)/n=e_n+O(1)$, ここに $\{e_n\}$ は単調増加列, そして $T(r)=\sup_n[n\log r-\log M_n]$ とおくとき $\int_0^\infty T(r)r^{-2}dr<\infty$ なるようなものとする。Γ をコンパクトな無限群とするとき $\hat{f}\in A(\Gamma)$ が存在して、$[\hat{f}]\subset C(M_n,I)$, $\|f\|<1+\varepsilon$。但し $[\hat{f}]$ は I 上で定義され $F(\hat{f})\in A(\Gamma)$ となるような函数Fの集合で、$C(M_n,I)$ は I 上で定義され $\sup_{n,x\in I}|F^{(n)}(x)/M_n|^{\frac{1}{n}}<\infty$ なる函数Fの集合

である。

ところで上の定理の仮定をみたす数列$\{M_n\}$の集合を$\mathfrak{M}$と記す。そして$A(I)$をI上で解析的な函数全体の集合とするとき、$A(I) = \cap C(M_n, I)$。ここに共通部分はすべての$\{M_n\} \in \mathfrak{M}$に対してとられる。このことより§1の定理1の一部が導かれる。

Kahane [4]はこの定理を次のように改良した。

定理9. $M_n^{-\frac{1}{n}} = o(\frac{1}{n})$ $(n \to \infty)$ならば、$\hat{f} \in A(\Gamma)$が存在して、$[\hat{f}] \subset C(M_n, I)$.

その他、色々な函数空間についても、作用函数が研究され、又研究されつつある。最後に、特別に定義しなかった記号はRudinの本[11]によったこと断わっておく。

引用文献.

[1]. A. Beurling; Contruction and analysis of some convolution algebras. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14 (1964) 1-32.

[2]. H. Helson, J.-P. Kahane, Y. Katznelson and W. Rudin; The functions which operates on Fourier transforms. Acta Math. 102 (1959) 135-157.

[3] S. Igari; Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace

$\hat{A}^2$. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 15 (1965) 525-536.

[4]. J.-P. Kahane ; Une nouvelle réciproque du théorème de Wiener-Lévy. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 264 (1967) 104-106

[5]. P. Malliavin ; Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$. Bull. Soc. Math. France. 87 (1959) 181-186.

[6] J. Marcinkiewicz ; Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Mat. 16 (1940) 66-73.

[7] D. Rider ; Transformations of Fourier coefficients. Pacific Journ. Math. 19 (1966) 347-355.

[8] N. M. Riviere and Y. Sagher ; The converse of Wiener-Levy-Marcinkiewicz theorem. Studia Math. 28 (1966) 133-138.

[9]. W. Rudin ; Some theorems on Fourier coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 855-859

[10]. W. Rudin ; A strong converse of the Wiener-Levy theorem. Canadian Journ. Math. 14 (1962) 694-701.

[11] W. Rudin ; Fourier analysis on groups. Interscience 1962.

[12] Y. Uno ; Operating functions on some subspaces of l_p. Tôhoku Math. Journ. 20 (1968) 60-72.