数理解析研究所講究録
55巻 1968年 53-62

Thin set 上の測度について

都大　理学部　　佐伯貞浩

G を locally compact abelian group, $\Gamma = \hat{G}$ をその dual とする。G上の任意の測度 μ に対して, $\mu^1 = \mu$, $\mu^{n+1} = \mu^n * \mu$ とおく。まず, こゝでの主要定理を次の形に述べる。

<u>定理1.</u> すべての non-discrete locally compact abelian group は, 任意の正整数 k に対して, 次の条件を満たす非負値実測度 $\mu \neq 0$ を持つ:

(a)　$\mu^1, \cdots, \mu^k$ はすべて Haar 測度に関して特異な測度である。

(b)　k だけに関係する正整数 s が存在して, μ^s は Haar 測度に関して絶対連続である。

証明は §6 で与える。この定理の応用を述べるために, G 上の measure algebra を M(G) とし, その max. ideal space を Hom(G) とする。又，絶対連続な測度の作る閉 ideal を $M_a(G)$，その Fourier 変換 $\hat{\mu}$ が $\hat{G}$ の外部で0となる様な測度 μ の作る閉 ideal を $M_v(G)$ とする。

系. Gが non-discrete ならば，商空間 $M_v(G)/M_a(G)$ は無限次元の Banach 空間である。

証明. 任意の正整数 k に対して，定理の条件 (a)，(b) を満たす測度 $\mu \neq 0$ を取る。もし $h \in \mathrm{Hom}(G) \setminus \hat{G}$ とすれば，$\widehat{\mu^s}(h) = (\hat{\mu}(h))^s = 0$。よって $\mu \in M_v(G)$。又，条件 (a)，(b) より，$\mu^1, \cdots, \mu^k$ は mod $M_a(G)$ で1次独立である。(Q. E. D.)

§1. 記号，定義，及び補助定理.

任意のGに対して，h_G はその Haar 測度を表わし，Gが compact のときは常に $h_G(G)=1$ とする。Gの各元 x に対し $\delta(x)$ を x での点測度，又 $\Delta(x) = \frac{1}{2}\{\delta(x) + \delta(-x)\}$ とする。Gの任意の集合P，及び $k \in Z^+$ に対して，

$$kP = \{\textstyle\sum_1^k x_j \ : \ x_j \in P,\ 1 \leqq j \leqq k\}$$

と定義し，$|P|$ はPの濃度を表わす。さらに，測度 μ の台を $S(\mu)$ で表わすことにする。

さて，compact Gで，次のような閉部分群の列Σを含むものを考える：$\Sigma = \{G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots\}$，かつ

$\bigcap_1^\infty G_n = \{0\}$。この列$\Sigma$に対して，確率空間$(\Omega, B, h)$を次の様なものとする：$\Omega = \prod_1^\infty G_n$；Bは$\Omega$の（位相的）Borel field；$h$は直積測度$\otimes_1^\infty h_{G_n}$。

定義 1. Ωの各元$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$に対して，

$$\mu = \mu_\omega = \circledast_1^\infty \mu_n \in M^+(G)$$

とおく。こゝに$\mu_n = \Delta(\omega_n)$であって，convolutionの収束は，$M(G)$の弱位相で考える。この様な測度μ_ωを$\Omega(\Sigma)$測度という。

補助定理. 正整数kに対して，Σが$\lim 2^{kn} h_G(G_{n+1}) = 0$を充たせば，すべての$\Omega(\Sigma)$測度は定理1の条件(a)を満足する。

さて$k, m \in Z^+$に対して

$$\sigma(s) = \int_0^1 |\cos 2\pi t|^s dt$$

$$\sigma(s : m) = \frac{1}{m} \sum_1^m |\cos \frac{2\pi}{m} j|^s$$

とおく。このとき，$\sigma(s) = A(s)\, s^{-\frac{1}{2}}$とおけば，

$$\lim A(s) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}, \quad A(s) < (2/\pi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(s : m) \leqq A(s)\, s^{-\frac{1}{2}} + 4/m$$

が成立する。

最後に，定理1の条件(a),(b)を充たす非負値測度μを

(k, s)型の測度と呼ぶことにする：たゞし $\mu \neq 0$。

§2. $G = R$ 及び $G = T$ の場合.

定理2. 各 $k \in Z^+$ に対し，$s\ (\in Z^+) < (2/\pi) 4^k + 1$ が存在し，G は (k, s) 型の測度を持つ。

証明. 与えられた k に対して，定数 $C_1 > 1$ を

$$\mathrm{Im}\,[\,(2/\pi) 4^k] + 1 > C_1^2 (2/\pi) 4^k$$

となるように定める。こゝに $\mathrm{Im}\,[\alpha]$ は α の整数部分を表わす。そして，2つの数列 $\{a_n\}_1^\infty$ と $\{b_n\}_1^\infty$ を定義する：

$$a_n = (\log 2)^{-1} \log C_1 + n^{-1} (\log 3n)^{-1}$$
$$b_n = 2^{-(k + a_n)}。$$

このとき，$1 < C_2 < C_1$，$b_n' = C_2 b_n < 1/2$ なる定数 C_2 を取る。これらに対して，確率空間 (Ω, B, h) を次の様に構成する：$\Omega = \prod_1^\infty I_n$, $I_n = [b_n, b_n']$；B は Ω の Borel field；$h = \otimes_{n=1}^\infty h_n$，$h_n$ は $h_n(I_n) = 1$ なる I_n 上の Lebesgue 測度。そして $\omega = (\omega_n) \in \Omega$ に対して，区間 $[0, 1]$ 上の測度 μ_ω を

$$\hat{\mu}_\omega(\gamma) = e^{i\pi\gamma} \prod_1^\infty \cos[\pi\gamma\,\omega_1 \cdots \omega_{n-1} (1 - \omega_n)]$$

によって対応させる。

このとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$S(\mu_\omega^k)$ の測度が 0 であること，及び 任意の $s > C_1^2 \{A(s)\}^2 4^k$ に対

して， $E\left(\int_{\hat{G}}|\hat{\mu}_\omega(\gamma)|^s d\gamma\right) < +\infty$ が示される。このことから，測度 μ_ω が a.a. $\omega\in\Omega$ に対して，(k, s) 型の測度であることが結論される。（Q. E. D.）

§3. $G=\Pi_1^\infty Z(p_n)$ の場合（各 p_n は素数，$p_n < p_{n+1}$）.

<u>定理3</u>．この場合も，定理2が成立する。

証明。k を固定して，各 $n\in Z^+$ に対して

$$q_n = \mathrm{Im}[(k\log 2)^{-1}\{\log(p_1\cdots p_n) - \log\log 3n\}]$$

とおく。定理を示すには，$0=q_0 < q_n < q_{n+1}$ と仮定してよい。これを仮定した上で，数列 $\{K_j\}_1^\infty$ を

$$K_{q_{n-1}+1} = K_{q_{n-1}+2} = \cdots = K_{q_n} = n$$

で定義し，G の閉部分群の列 $\Sigma=\{G_n\}$ を $G_n = \Pi_{K_n}^\infty Z(p_j)$ で定める。

このとき，各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu=\mu_\omega$ に対して $h_G[S(\mu^k)] = 0$ が示される。更に，任意の $s \geqq (2/\pi)4^k$ に対して

$$E\left(\sum_{\gamma\in\hat{G}}|\hat{\mu}(\gamma)|^s\right) < +\infty$$

が示され，定理の結論を得る。（Q. E. D.）

§4. $G=U(p)$ の場合（p-adic integer の作る群，p は任意の素数）.

<u>定理4.</u> この場合も，定理2が成立する。

証明. 素数 p と $k\in Z^+$ を固定し，$n=0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$K_n = \mathrm{Im}\left[(\log p)^{-1}\{(k\log 2)n + \log\log\log e^e(n+1)\}\right]$$

とおく。Gの元xは

$$x = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$

——たゞし，各 x_n は $0\leqq x_n\leqq p-1$ なる整数——という形に一意に書き表わせることに注意して，Gの閉部分群の列 $\Sigma=\{G_n\}$ を

$$G_n = \{x\in G: x_j = 0,\ \forall j < K_n\}$$

で定義する。

このとき，各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu=\mu_\omega$ に対して，$h_G[S(\mu^k)]=0$であること，又，任意の $s\geqq(2/\pi)4^k$ に対して

$$E(\textstyle\sum_\gamma|\hat{\mu}(\gamma)|^s) < +\infty$$

が示されるから，定理の結論を得る。(Q.E.D.)

§5. $G=\prod_1^\infty G^{(j)}$ (すべてのjに対して，$G^{(j)}=Z(p)$: pは任意の素数).

<u>定理5.</u> 各 $k\in Z^+$に対して，$s=s(k)\in Z^+$が存在しGは(k, s)型の測度を持つ。

証明. kを固定し, n_0, $s_0 \in Z^+$ を

$$(2/\pi)\, s_0^{-\frac{1}{2}} + 4/n_0 < 2^{-k}$$

を充たす任意のものとする。まず最初に次のことを示す。

(A) すべての素数 $p \geqq n_0$ に対して, $G = G(p)$ は (k, s_0) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 $p \geqq n_0$ を固定して, 数列 $\{K_n\}_0^\infty$ を次式で定義する。

$$K_n = \operatorname{In}\left[(\log p)^{-1}\{(k \log 2)n + \log(n+1)\}\right].$$

これに対して, Gの閉部分群の列Σ を

$$\Sigma = \{G_n\}_0^\infty \quad ; \quad G_n = \Pi_{j \geqq K_n} G^{(j)}$$

によって対応させる。このとき, $\Omega(\Sigma)$測度 μ_ω が a.a. $\omega \in \Omega$ に対して, (k, s_0) 型の測度であることが示せる。

次に, 次のことを示す。

(B). 各素数 p に対して, ある $s = s(k, p) \in Z^+$が存在して, 群 $G = G(p)$ は (k, s) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 p を任意に固定する。さて, すべての L, $s \in Z^+$ に対して,

$$\sigma_L(s:p) = p^{-L} \sum_{j_1=1}^{p} \cdots \sum_{j_L=1}^{p} \left\{\frac{1}{L}\left|\sum_{l=1}^{L} \cos\frac{2\pi}{p} j_l\right|\right\}^s$$

とおく。更に, 数列 $\{K'_n\}_0^\infty$ を

$$K'_n = K'_n(L) = \operatorname{In}\left[(\log p)^{-1}\{(k \log 2L)n + \log(n+1)\}\right]$$

で定義し，Gの閉部分群の列Σ'を

$$\Sigma' = \{G_m\}_0^\infty \; ; \; G_m = \prod_{j \geq K'_m} G^{(j)}$$

と定義する。このΣ'に対して，確率空間（$\Omega(L)$, B, h）を次の様に構成する：$\Omega(L) = \prod_1^\infty G_m{}^L$；B は Borel field；$h = \otimes_1^\infty h_m$，こゝに各$h_m$は$G_m{}^L$の Haar 測度。このとき$\Omega(L)$の元$\omega$は$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_m, \cdots)$ — たゞし$\omega_m = (\omega_m^1, \cdots, \omega_m^L) \in G_m^L$ — の形に書ける。そこで，各$\omega \in \Omega(L)$に対して，G上の0でない測度$\mu' = \mu'_\omega \in M^+(G)$を次の様に定義する：

$$\mu'_\omega = \circledast_1^\infty \mu'_m \; ; \; \mu'_m = L^{-1} \Sigma_1^L \Delta(\omega_m^j)\text{。}$$

このとき，すべての測度$\mu' = \mu'_\omega$が定理1の条件(a)を充たすことが示せる。又，$L \in Z^+$を$2/p^L < (2L)^{-k}$となる様に選んでおくと，十分大きな$s \in Z^+$に対して

$$\sigma_L(s : p) < (2L)^{-k}$$

が成立する。これらのことから，命題（B)が得られる。

(A)と(B)から，容易に定理5が得られる。（Q.E.D.）。

§6. 定理1の完全な証明.

<u>補助定理 6-1</u>. Kを loc. compact abelian group，K_1をその compact な部分群とする。このとき，もし商群K/K_1がある正整数の組（k, s)に対して（k, s)型の測度を持て

ば, Kも又 (k, s) 型の測度を持つ。

証明. g をKから K/K_1 の上への自然な準同型写像とする。g は $M(K/K_1)$ から $M(K)$ の中への同型写像 g' を生じる。このとき, g' は (k, s) 型であるという測度の性質を保つ。このことから, 命題は示される。(Q.E.D.)

<u>補助定理 6-2</u>. Kを無限個の元より成る compact群とする。このとき, Kの閉部分群 K_1 が存在して, 商群 K/K_1 は次のいずれかの群と同型である: (i) T, (ii) $\prod_1^\infty Z(p_j)$, こゝに各 p_j は素数であって $p_j < p_{j+1}$, (iii) $U(p)$, p は素数, (iv) $G(p)$, p は素数。

これは Varopoulos による。

<u>定理1の証明</u>. Gを non-discrete, k を任意に固定した正の整数とする。s として, 定理2〜5に現われた s の中で, 最大のものを取る。最初に, Gが compact な閉部分群Kを含む場合を考える。このとき補助定理 6-1, 6-2, 及び定理2〜5から, Kは (k, s) 型の測度を持つ。KはGの閉部分群であるから, G自身も (k, s) 型の測度を持つ。

次にGが上の様なKを含まない場合を考える。このとき, ある $n \in Z^+$ と compact群Kに対して, Gは $G_1 = R^n \times K$

を南部分群として含む。 μ をR上の (h, s) 型の測度として，$G_1 = R^n \times K$ 上に直積測度 $\lambda = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n \times h_K$ を定義する，こゝに $\mu_j = \mu$。 このとき，λ は G_1 上の (h, s) 型の測度である。又，G_1 は G の南部分群であるから，λ は G 上の (h, s) 型の測度でもある。 (Q. E. D.)

文　献

[1] W. Rudin, Measure algebras on abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), pp. 227 - 247.

[2] ———, Fourier-Stieltjes transoforms of measures on independent sets, ibid, 66 (1960), pp. 199 - 202.

[3] ———, Fourier analysis on groups, Intersclence.

[4] R. Salem, On sets of multiplicity for trigonometric series, Amer. Jour. Math., 64 (1942), pp. 531 - 538.

[5] Yu. A. Sreider, The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Translation, 1, 8 (1962), pp. 365 - 391.

[6] N. Th. Varopoulos, Sets of multiplicity in loc. compact abelian groups, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16 (1966), pp. 123 - 158.