数理解析研究所講究録
55巻 1968年 33-42

特異積分作用素について

阪大 基礎工 小泉 澄之

§1. 特異積分作用素―(I)

$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ はn次元ユークリッド空間の点, または, $0=(0,0,\cdots,0)$ から $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ へのベクトルを, $|x|$はその長さ$(\sum\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}$ を表わすものとする.

$k(x)$ は次数$-n$ の同次函数, すなわち

$$(1.1)\qquad k(\lambda x)=\lambda^{-n}k(x),\qquad \forall x;\ \lambda>0$$

を満たし, さらに, 次の性質

$$(1.2)\qquad \int_\Sigma k(x)\,d\sigma=0\ ;\qquad (1.3)\qquad \int_\Sigma |k(x)|^p d\sigma<\infty$$

が成立しているものとする. ここに, $p>1$で, Σは単位球: $|x|=1$, $d\sigma$は Σ上の面積要素とする.

$f\in L^r$ $(r>1)$ ならば

$$(1.4)\qquad \tilde{f}_\varepsilon(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)f(y)\,dy$$

とおくと

$$(1.5)\qquad \tilde{f}_\varepsilon(x) \to \tilde{f}(x), \quad \text{a.e.} \quad (\text{pointwise})$$

$$(1.6)\qquad \tilde{f}_\varepsilon(x) \to \tilde{f}(x), \quad \text{in mean}$$

および

$$(1.7)\qquad \|\tilde{f}\|_r \leqq A_{r,p}\left[\int_\Sigma |k(x)|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_r$$

が成立する。この結果は、次の形式の特異積分作用素

$$(1.8)\qquad K(f) = \alpha f + \tilde{f}, \quad \alpha \text{ は complex const.}$$

の間における積（composition）の可能性を保証している。

条件(1.2)は $\tilde{f}$ の存在のための必要条件である。それは，$f(x)$ を $|x| \leqq 1$ の上の特性函数とすれば，

$$K(x) = \Omega(x')/|x|^n, \qquad x' = x/|x|$$

だから

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|<1} k(x-y)\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}}{r^n}dr\int_\Sigma \Omega(y')d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\log\frac{1}{\varepsilon}\int_\Sigma \Omega(y')d\sigma$$

から明白である。

例1. Hilbert変換．$n=1$ のとき，$k(x) = \Omega(x')/|x|$ で(1.2)を満たす $\Omega(x')$ は $\mathrm{sign}|x|$ に限る．従って，このときは

Hilbert変換が得られる．すなわち

(1.9) $$Hf = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

例2．Riesz変換 $n \geqq 2$ のとき，$k(x) = x_k/|x|^{n+1}$ とおくと(1.2)を満足する．このとき

(1.10) $$R_k f = \int \frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy, \quad (k=1,2,\cdots n)$$

はRiesz変換と呼ばれる．

(1.1), (1.2) および (1.3)が成立しているとき，$f \in L_2$ とし，$k_{\varepsilon,\eta}(x) = k(x)$, $\varepsilon < |x| < \eta$; $= 0$, $|x| < \varepsilon$, $|x| > \eta$. とおいて，$\tilde{f}_{\varepsilon,\eta} = K_{\varepsilon,\eta} * f$ のフーリエ変換を考える．Faltung rule によって，$\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\eta} = \hat{K}_{\varepsilon,\eta} \cdot \hat{f}$. このとき，$|x| = r$, $|y| = \rho$, $(x, y) = r\rho\cos\varphi$ とおくと，$dy = \rho^{n-1} d\rho\, d\sigma$, $k(x) = \Omega(x')/|x|^n$ だから

$$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma d\sigma \int_\varepsilon^\eta \rho^{-1} \Omega(y') e^{-2\pi i r\rho\cos\varphi}\, d\rho$$

$$= \int_\Sigma \Omega(y')\, d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i\rho\cos\varphi}}{\rho}\, d\varphi$$

$g(\rho) = 1$, $\rho \leqq 1$; $= 0$, $\rho > 1$ とおいて，(1.2)を用いると

$$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma \Omega(y')\, d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i\rho\cos\varphi} - g(\rho)}{\rho}\, d\rho$$

ここで，

$$\left| \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i \rho \cos\varphi} - g(\rho)}{\rho} d\rho \right| \leqq \log \frac{1}{|\cos\varphi|} + C$$

だから，$\eta \to \infty$，次に $\varepsilon \to 0$ のとき，$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x)$ は $\hat{k}(x)$ に有界収束である．従って

$$\| \hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) \hat{f}(x) - \hat{k}(x) \hat{f}(x) \|_2 \to 0$$

故に，$\tilde{f}$ のフーリエ変換を $\hat{\tilde{f}} = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{l.i.m.}} \underset{\eta \to \infty}{\text{l.i.m.}} \hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\eta}$ と定義すると，

$$(1.11) \qquad \hat{\tilde{f}}(x) = \hat{k}(x) \cdot \hat{f}(x)$$

が得られる．従って，作用素 $K(f)$ のフーリエ変換は

$$(1.12) \qquad \hat{K}(f) = (\alpha + \hat{k}) \cdot \hat{f}$$

である．ここで

$$(1.13) \qquad \alpha + \hat{k} = \sigma(K)$$

と書いて，これを作用素 K の symbol と呼ぶ，従って，

$$(1.14) \qquad \hat{K}(f) = \sigma(K) \hat{f}$$

および

$$(1.15) \qquad K(f)(x) = \int \sigma(K) \hat{f} e^{2\pi i (x,y)} dy$$

を得る．(1.15) を psudo-differential operator と呼んでいる．

次に，特異積分作用素のクラスを二つ，次のように定める．

(I). 族 $\mathcal{A}$. $k(x)$ は (1.1), (1.2) を満たし，$x \neq 0$ のとき，C^∞

に属するものとする．このような核$k(x)$から生成された作用素Kの作る族を$\mathfrak{a}$で表わす．

(II) 族$\mathfrak{a}_p$ $(p>1)$．$k(x)$は(1.1), (1.2)および(1.3)を満足するものとする．このような核$k(x)$から生成された作用素Kの作る族を$\mathfrak{a}_p$で表わす．(1.7)から判るように

$$(1.16) \qquad \|K\|_p = |\alpha| + \left[\int_\Sigma |k(x)|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}}$$

で，作用素Kのノルムと定義する．

定理 1．$\mathfrak{a}$は(I)で定義された作用素の族とする．

(i) 族$\mathfrak{a}$は作用素の和および積について閉じている．

(ii) 作用素$K \in \mathfrak{a}$のsymbol $\sigma(K) = \alpha + \hat{k}$は$x \neq 0$で$C^\infty$に属する，次数0の同次函数である．そして，$K, H$が$\mathfrak{a}$に属するとき，

$$\sigma(K+H) = \sigma(K) + \sigma(H), \quad \sigma(K \cdot H) = \sigma(K) \cdot \sigma(H).$$

(iii) 逆に$x \neq 0$でC^∞に属する次数0の同次函数は，$\mathfrak{a}$に属するある作用素のsymbolになっている．従って，$\mathfrak{a}$に属する，ある作用素が$\mathfrak{a}$の中で逆元をもつための必要十分条件はそのsymbolが零点をもたないことである．

(iv) $$\beta(\hat{k}) = \sum_{|\alpha| \leq n+1} \sup_{|x| \geq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right|$$

ただし，

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，各$\alpha_k$は0または正の整数で，

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

ならば

$$(1.17) \qquad \sup_{|x|=1} |k(x)| \leqq A\,\beta(\hat{k}).$$

ここに，A は k に関係しない定数である．

証明．次の記号を用いる．

$$f\cdot g = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f * g = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$$

$$g^\lambda(x) = \lambda^n g(\lambda x), \qquad g_\lambda(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \geqq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$

$\hat{f}$ は f のフーリエ変換，族 $\mathcal{S}$ は急減少函数の作る族とする．

$f(x)$ が $|x|$ だけの函数のとき，f は radial であるという．$f \in \mathcal{S}$ が radial ならば $\hat{f} \in \mathcal{S}$ もまた radial である．

$f\cdot g = 0$，$\forall$ radial $g \in \mathcal{S}$，のとき，f を corradial であるという．$f\cdot g = \hat{f}\cdot\hat{g}$ から f が corradial ならば $\hat{f}$ もまた corradial である．

k が同次函数であるとき，条件 (1.2) の成立と k が corradial であることとは同値である．これは，h を radial として，

$$k\cdot h = \int k(x)\overline{h(x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{\overline{h(|x|)}}{|x|^n}\,dr \int_\Sigma \Omega(x')\,d\sigma$$

から明白である．

定理の証明は，与えられた次数の同次函数の表現に基いている．$g(x)$は族$\mathcal{S}$に属し，corradial とする．このとき，$g(0)=0$，

$$(1.18)\quad k(x) = \int_0^\infty g^\lambda(x)\,\lambda^{-n-1+r}\,d\lambda = \int_0^{1} \{g(\lambda x)-g(0)\}\lambda^{r-1}d\lambda + \int_1^\infty g(\lambda x)\lambda^{r-1}\,d\lambda$$

は，$r>-1$で絶対収束し，$k(x)$は次数$-r$の corradial な同次函数で，$x\neq 0$で族C^∞に属する．逆に，$k(x)$を次数$-r$の corradial な同次函数で，$x\neq 0$でC^∞に属するならば，$g(x)=k(x)\rho(|x|)$とおく，ただし$\rho(t)\in C^\infty$，$t=0$および∞の近傍で0に等しく

$$(1.19)\qquad \int_0^\infty \lambda^{-1}\rho(\lambda)\,d\lambda = 1$$

を満たす函数とする．この$g(x)$は明かに族$\mathcal{S}$に属し，corradial で，

$$\int_0^\infty g^\lambda(x)\,\lambda^{-n-1+r}\,d\lambda = \int_0^\infty k(\lambda x)\,\rho(|\lambda x|)\,\lambda^{-1+r}\,d\lambda$$

$$= k(x)\int_0^\infty \rho(|\lambda x|)\,\lambda^{-1}\,d\lambda = k(x)\int_0^\infty \lambda^{-1}\rho(\lambda)\,d\lambda = k(x)$$

から~~判る~~

$\rho(x)$は radial，C^∞に属し，$\rho(0)=1$，$\rho(x)=0$，$|x|\geqq 1$．また，$f(x)$はC_0^∞に属する任意の函数とする．~~また大きい~~

λ に対して, $k_\lambda \cdot p = 0$ である. そして

$$\hat{f}\cdot\hat{k} \triangleq \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{k}(x)}\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\int f(x)\,\overline{k_\lambda(x)}\,dx$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\int [f(x)-f(0)]\,\overline{k_\lambda(x)}\,dx = \int [f(x)-f(0)p(x)]\,\overline{k(x)}\,dx$$

$[f(x)-f(0)p(x)]_{x=0} = 0$ だから, (1.17) で $r = n$ とおいた式を代入して

$$\hat{f}\cdot\hat{k} = \int [f(x)-f(0)p(x)]\,dx\,\overline{\int_0^\infty \lambda^{-1} g^\lambda(x)\,d\lambda}$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{-1}d\lambda \int [f(x)-f(0)p(x)]\,\overline{g^\lambda(x)}\,dx$$

g^λ は corradial, p は radial だから $g^\lambda\cdot p = 0$, さらに

$$\widehat{g^\lambda}(x) = \int \lambda^n g(\lambda y)\, e^{-2\pi i(x,y)}\,dy = \int g(y)\, e^{-2\pi i\left(\frac{x}{\lambda},\, y\right)}\,dy$$

$$= \lambda^n\left[\lambda^{-n}\hat{g}(\lambda^{-1}x)\right] = \lambda^n\,\hat{g}^{\lambda^{-1}}(x).$$

故に, $\lambda^{-1} = \mu$ とおいて

$$\hat{f}\cdot\hat{k} = \int_0^\infty \lambda^{-1}d\lambda \int f(x)\,\overline{g^\lambda(x)}\,dx = \int_0^\infty d\lambda \int \hat{f}(x)\,\overline{\widehat{g^\lambda}(x)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda^n d\lambda \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}^{\lambda^{-1}}(x)}\,dx = \int_0^\infty \mu^{-n-1}d\mu \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}^{\mu}(x)}\,dx$$

$$= \int \hat{f}(x)\,dx\,\overline{\int \hat{g}^{\mu}(x)\,\mu^{-n-1}\,d\mu} = \hat{f}\cdot\int \hat{g}^{\mu}(x)\,\mu^{-n-1}\,d\mu$$

ここで，積分の順序の変更は，すべて絶対収束により保証される．そして，この関係式は C_0^∞ に属する任意の函数に対して成立している．故に

$$(1.20) \qquad f(x) = \int g^\lambda(x)\, \lambda^{-1}\, d\lambda$$

から

$$(1.21) \qquad \hat{f}(x) = \int \hat{g}^\lambda(x)\, \lambda^{-n-1} d\lambda$$

が導かれる． $g \in \mathcal{S}$ かつ corradial から $\hat{g}$ も $\mathcal{S}$ に属し corradial である．よって．(1.18) から判るように $\hat{f}(x)$ は $x \neq 0$ で C^∞ に属する，次数0の corradial な同次函数である．

逆に (1.21) から (1.20) が導かれることは明かであろう．これで，定理1の (i), (ii) および (iii) が，すべて証明された．

次に (iv) を証明しよう．いま述べたことから，$\hat{g}(y) = \hat{f}(y)\,p(|y|)$，ただし，$p(t) \in C^\infty$，$p(t) = 0$，$0 \leqq t < 1$，$2 < t$，(1.19) を満足する．この $\hat{g}$ を用いて，(1.21) によって，$\hat{f}$ を表現し，$g = \hat{g}^\vee$ を用いて (1.20) 式によって，f を表現する．$\vee$ はフーリエ逆変換を表わすものとする．このとき $|x| = 1$ に対して，

$$|f(x)| = \left| \int_0^\infty g(\lambda x)\, \lambda^{n-1} d\lambda \right|$$

$$= \sup |g(y)| \int_0^1 \lambda^{n-1} d\lambda + \sup |g(y)| |y|^{n+1} \int_1^\infty \lambda^{-2} d\lambda$$

次に, $g(x) = \hat{\hat{g}}'(x)$, $\wedge'$ は逆フーリエ変換, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ として

$$\xi_k^{n+1} g(x) = (2\pi i)^{-n-1} \int \left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y) \, e^{2\pi i (x, y)} dy$$

Hölder の不等式から $|x|^{n+1} \leqq n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum |\xi_i|^{n+1}$, よって

$$|g(x)| |x|^{n+1} \leqq (2\pi)^{-n-1} \cdot n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_k \int \left| \left(\frac{\partial}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y) \right| dy$$

$$|g(x)| \leqq \int |\hat{g}(y)| dy.$$

ここに, $\hat{g}(y) = \hat{k}(y) \rho(|y|)$, $\rho(|y|) = 0$, $|y| < 1$, $2 < |y|$

故に,
$$|g(x)| + |x|^{n+1} |g(x)| \leqq A \sum_{|\alpha| \leqq n+1} \sup_{|x| \geqq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right| = A \beta(\hat{k})$$

従って,
$$\sup_{|x|=1} |k(x)| \leqq A \beta(\hat{k}).$$

文献

[1] A. P. Calderón - A. Zygmund : Algebras of certain singular operators, Amer. Journ. Math. 78 (1956) 310-321

[2] A. P. Calderón - A. Zygmund : Singular integral operators and differential equations, Amer. Journ. Math. 79 (1957) 901-921

[3] A. P. Calderón : Algebras of Singular integral operators Proc. Symposia in Pure Math., vol X. (1967) 18-55.