数理解析研究所講究録
57巻 1968年 78-102

マルコフ過程の分解
―境界近傍のpathの行動とFeller―上野分解―

東大 理 岡部靖憲

§1 序

本尾氏の論文[6]における未解決問題のひとつを解決する。Sを第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff空間とし、DをSのopen subsetで、Sで稠密、$\partial D = S - D$がコンパクトになるものとする。

$M^{min} = (W, P_x^{min}; x \in S)$を次の$(M^{min}.1) \sim (M^{min}.3)$をみたすマルコフ過程とする;

$(M^{min}.1)$ Hunt process,

$(M^{min}.2)$ reference measureを持つ,

$(M^{min}.3)$ $P_\xi^{min}(x_t = \xi, \forall t) = 1$, $\xi \in \partial D$.

このとき、次の$(M.1) \sim (M.3)$をみたすマルコフ過程$M = (W, P_x; x \in S)$がどの位あるかを追求する;

$(M.1)$ Hunt process,

$(M.2)$ reference measureを持つ,

$$(M.3)\quad E_x\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right) = E_x^{min}\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right) \equiv G_\alpha^0 f(x),$$
$$E_x(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) = E_x^{min}(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) \equiv H_\alpha f(x),$$

但し、σ は ∂D への到達時間であり、$\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$ である。

正の数 $\gamma > 0$ をひとつ固定する。本尾氏は [6] において、さらに次の仮定；

$(M^{min}.4)$ $G_\alpha^0(C(S)) \subset C(S)$, $\alpha > 0$.
$H_\alpha(C(\partial D)) \subset C(S)$, $\alpha > 0$.

$(M^{min}.5)$ $\alpha > 0$, $f \in C(S)$ に対して、$\dfrac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}$ は ∂D にまで、連続に拡張される．拡張した函数を $\hat{H}_\alpha f$ とおく．

$(M^{min}.6)$ $\hat{H}_\alpha(C(S))$ は $C(S)$ で稠密である．

の下で、M はいわゆる "boundary system" $(\hat{M}, l, m, Q)$ によって決定されることを証明した。未解決問題とは、"上の条件、特に $(M^{min}.5)$; $(M^{min}.6)$、をより深い確率論でかつ一般的なものでおきかえよ" ということである。

この報告では、まず、$(M^{min}.1) \sim (M^{min}.3)$ の下で、次の定理を示す．

定理　(Feller－上野 分解)

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha\left\{ l f + (P+Q)\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right)\right\},$$

$\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$, l は $B(\partial D)^+$ の元、P は、$\mathcal{M} \equiv \left\{\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}; \alpha > 0, f \in B(D)\right\}$ とおくとき、$\overline{\mathcal{M}}\ (\subset B(D))$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への

bounded operator で、positive であり、(ν は dt の ∂D への r 次の掃散亜の canonical measure である。[3] の P.146.)、$\mathbb{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の bounded kernel であり、K^α は ∂D の上の α 次 U-process ([2] の P. 63) の 0 次の resolvent である。

<u>注意</u>　定理の $l, \mathbb{Q}$ は本尾氏の $l, \mathbb{Q}$ にあたり、$\mathbb{P}1$ が本尾氏の m にあたる。

次に、$\mathbb{P}$ の特徴付けを与える。それには、$\mathcal{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1} ; \alpha > 0, f \in C_\infty(D) \right\}$ とおくとき、次の仮定が必要となる。

<u>(※1)</u>　<u>$C_\infty(D) \subset \overline{\mathcal{M}_\infty} \ (\subset B(D))$</u>

<u>定理</u>　<u>($\mathbb{P}$ の特徴付け)</u>

仮定(※)の下で、$\mathbb{P}(C_\infty(D)) = \{0\}$ である。

そして、Feller−上野分解の一意性が成り立つ。

<u>注意</u>　entrance boundary を導入せずに、$\mathbb{P}$ の特徴付けを行うには、上の仮定(※1)が必要となる。しかし、entrance boundary を導入することによって、一般な条件 ((※2)) に(※1)をおきかえることができる。それは、次に述べる定理である。

<u>定理</u>　<u>($\mathbb{P}$ の表現)</u>

D^* を D の $\mathcal{M}_\infty$ − compact 化とする[1]。これは、$G_\alpha^0 f$ を $G_r^0 1$ で優調和変換した resolvent を $G_\alpha^1 f = \frac{G_\alpha^0 (f G_r^0 1)}{G_r^0 1}$ とおくとき、D の $G_\alpha^1(C(D))$ − compact 化と一致する。(次の仮定Iの下で.)

(注2)

<u>仮定 I</u>　$G^0_\alpha(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$,　　$G^0_r 1 \in C_\infty(D)$

<u>仮定 II</u>　$G^*_\alpha f = G^1_\alpha f|_D$ の連続拡張.　$f \in C(D^*)$ とおくとき、$\{ f \in C(D^*)^+ ; \forall \alpha > 0 \ \ \alpha G^*_\alpha f \le f \}$ が内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離する。

この仮定の下で、$\{G^*_\alpha ; \alpha > 0\}$ は Ray の仮定（[9]）をみたすので、その branching point 全体を D^*_b とおくとき、次のことが成り立つ。

∂D の各点 ξ に対して、D^* 上の(有界)測度 $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2), (3) を満たす;

(1)　$\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　ν-a.e. ξ　　$P\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$

　但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張した函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D^*) \le P1(\xi)$

(3)　$\forall \xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D^*_b) = 0$

上の (1), (2), (3) をみたす $\mu(\xi, d\eta)$ は ルベーグ測度 0 の ξ を除いて唯ひとつである。

<u>注意</u>　仮定 II は、Ray's hypothesis をみたすために必要になる。このとき、Ray の結果がうまく使えるのである。
Choquet の結果（[8] の P.43）を使って証明しようと試みると、G^*_α の range $R(G^*_\alpha)$ が 内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離する ということが必要になる。

このときは、もちろん仮定IIをみたすわけであるが、D^*_b の補集合 $D^*-D^*_b$ は $\mathcal{R}(\mathfrak{S}^*_\alpha)$ に対する D^* の Choquet boundary と一致することが示せる。([8]のP.45)。いずれの場合も、この段階では、$\mu(\xi, d\eta)$ の support が D^*-D にあることは主張していないが、このことをもっと精密に述べるのが次の定理である。

定理　($\mu(\xi, d\eta)$ の support)

∂D の各点 ξ に対して、$S_\xi \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{x\in D;\ dist(x,\xi)<\varepsilon\}}$

(closure は D^* において) とおくとき、

(1)　$S_\xi \subset D^*-D$

(2)　$\mu(\xi, D^*-S_\xi)=0$

注意　本尾氏の仮定 $(M^{min}5)$, $(M^{min}6)$ の下では、$D^*=S$ となり、$S_\xi=\{\xi\}$ である。それ故、$\mu(\xi, d\eta)$ の support を S_ξ の proper subset におとすことは不可能である。
上の2つの定理において、Dの $\mathfrak{M}_\infty$-compact化を行ったために、仮定IIが必要になったが、Dの $\mathfrak{M}_\infty$-completion を行うときは、仮定IIは不必要となり、上の2の定理の内、最後の定理の(1)を除いて(これは、$\mathfrak{M}_\infty$-completion をとったときは、Dが homeo に入らないことによる(一般には))、すべて成り立つ。一般的に、Q-compact化とQ-completionとの関係が分ったのだが、この

ことに関しては、別の機会に　する。

§2　$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}$ と $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}$

正の数 $r>0$ を固定する。time additive functional $t\wedge\zeta(w)$ の ∂D への r 次掃散を Φ とし、その右逆函数を τ とする。ν を Φ の canonical measure ([3] の p.145)、(P, L) を M の Lévy system ([4], [11]) とし、$P_D f(x)=\int_D P(x,dy)f(y)$ と定義するとき、[6]において、我々の仮定の下で、次の事実が示されている。

補題2.1　([6] の p.88 の(31))

$\exists\, l,\ m,\ n \in B^{+}(\partial D)$, $^{\exists}\mathbb{Q} : \partial D\times D$ 上の bounded kernel

such that　(1)　$l\cdot\Phi \approx \chi_{\partial D}\cdot dt$

(2)　$E_x\left(\int_0^{\infty} e^{-rt}\, m\, d\Phi\right) = E_x\left(\sum_{s\in T_c}\int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-rt}\,dt\right), \quad \forall x\in S$

(3)　$\mathbb{Q}h\cdot\Phi \approx \chi_{\partial D}\, P_D(h\, G_r^0 1)\cdot L \quad , \ h\in B(D)$

(4)　$n(\xi)=\mathbb{Q}(\xi, D)$

(5)　$l(\xi)+m(\xi)+n(\xi)=1 \qquad \nu\text{-a.e. } \xi\in\partial D.$

ここで、　$T(w)\equiv\{s\ ;\ 0<s,\ \ \tau(s-)<\tau(s)\wedge\zeta(w)\}$

$T_c(w)=\{s\in T(w)\ ;\quad x_{\tau(s-)-}(w) = x_{\tau(s-)}(w)\}$

$T_d(w)=\{s\in T(w)\ ;\quad x_{\tau(s-)-}(w) \neq x_{\tau(s-)}(w)\}$

定義 2.1　$f,\ g,\ h\in B(S),\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ x\in S$ に対して

$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)\equiv E_x\left(\sum_{s\in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)})\int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))}\, h(x_t)\,dt\right)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) \equiv E_x\Big(\sum_{s\in T_d} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) \equiv E_x\Big(\sum_{s\in T} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

と定義する。

<u>補題2.2</u>

(1) $|\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)|,\ |\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)|,\ |\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)| \leq \dfrac{\|f\|\cdot\|g\|\cdot\|h\|}{\alpha\wedge\beta}$

(2) $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) + \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)$

(3) $\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f\times g,\ h)(x)$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x)=0\ ,\quad \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ \chi_{\partial D})(x)=0.$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_{\partial D},\ g)(x)$

(4) $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x)=0,\quad \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ \chi_{\partial D})(x)=0.$

$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_D,\ g)(x) \qquad \forall x\in S.$

<u>補題2.3</u>　([6]の P86 の [5.4])

$f,\ g \in B^+(S),\quad \alpha>0$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D\, g(x_{R_n(k)})\Big) = E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t)\, P_D g(x_t)\, dL(t)\Big) \qquad \forall x\in S.$$

$\{R_n(k)\}$ は [6]の P82 の (2) で定義されたマルコフ time の列である。

補題2.4　　$f,\ g \in C(\mathfrak{S}),\ k \in B(\mathfrak{S}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^{\circ} k(x_{R_n(k)})\Big)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f,\ g,\ k)(x).$$

補題2.5　　$f \in C(\mathfrak{S}),\ g \in B^{+}(\mathfrak{S}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \overline{R_n(k)}} f(x_{\overline{R_n(k)}-})\, G_\beta^{\circ} g(x_{\overline{R_n(k)}})\Big)$$
$$= E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\big(\widetilde{\chi_D g\cdot dt}\big)_\beta\Big)$$

$\{\overline{R_n(k)}\}$は[6]のP87の(21)で定義されたマルコフtimeの列である。

補題2.6　　$f \in B(\mathfrak{S}),\ g \in B^{+}(\mathfrak{S}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\big(\widetilde{\chi_D g\cdot dt}\big)_\beta\Big)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f,\ g)(x) + E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(G_\beta^{\circ} g)(x_t)\, dL\Big)$$

補題2.7　　$f,\ g,\ k \in B(\mathfrak{S}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^{\circ} k(x_{R_n(k)})\Big)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{d}(f,\ g,\ k)(x)$$

補題2.8　　$f,\ g,\ k \in B(\mathfrak{S}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

(1)　$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{d}(f,\ g,\ k)(x)$

$$= E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(g G_\beta^{\circ} k)(x_t)\, dL(t)\Big)$$
$$= H_\alpha K^{\alpha}\Big\{ f\ \mathcal{Q}\Big(g\cdot \frac{G_\beta^{\circ} k}{G_\gamma^{\circ} 1}\Big)\Big\}(x)$$

(2)　$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{d}(f,\ g)(x) = H_\alpha K^{\alpha}\Big\{ f\ \mathcal{Q}\Big(\frac{G_\beta^{\circ} g}{G_\gamma^{\circ} 1}\Big)\Big\}(x).$

但し、K^{α}は、$K^{\alpha} g(\underset{\partial D}{\xi}) = E_\xi\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(x_t)\, d\Phi(t)\Big)$ である。

補題2.9 $f \in B(\mathfrak{S}),\quad \alpha > 0,\quad x \in \mathfrak{S}$

$$G_\alpha(f\chi_{\partial D})(x) = H_\alpha K^\alpha(\ell[f]_{\partial D})(x)$$

補題2.10 $f \in B(\mathfrak{S}),\quad g \in B^+(\mathfrak{S}),\quad \alpha > 0, \beta > 0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\,\widehat{(\chi_D g \cdot dt)}_\beta\right)$$

$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x)$$

補題2.11 $f,\ g \in C(\mathfrak{S}),\quad h \in B(\mathfrak{S}),\ \alpha > 0, \beta > 0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_k(n)} f(x_{R_k(n)-})\, g(x_{R_k(n)})\, G^0_\beta h(x_{R_k(n)})\right)$$

$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ h)(x)$$

補題2.12 $f,\ g,\ h \in B(\mathfrak{S}),\quad \alpha > 0, \beta > 0,\quad \delta > 0.\ x \in \mathfrak{S}$

(1) $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ h)(x) - \mathcal{E}^c_{\alpha,\delta}(f, g, h)(x) + (\beta - \delta)\,\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f, g, G^0_\delta h)(x) = 0$

(2) 特に $f \geq 0,\ g \geq 0,\ h \geq 0$ のとき

$$e^{-\beta t}\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ T^{\min}_t h)(x) \leq \mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ h)(x) \quad \forall t > 0$$

同じ事実が $\mathcal{E}^d_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ に対しても成立する。

補題2.13 $f \in B(\mathfrak{S}),\quad \alpha > 0,\ x \in \mathfrak{S},\ \xi \in \partial D$

(1) $\mathcal{E}^c_{\alpha,r}(f,\ 1)(x) = H_\alpha K^\alpha(mf)(x)$

(2) $\mathcal{E}_{\alpha,r}(f,\ 1)(x) = H_\alpha K^\alpha((m+n)f)(x)$

(3) $K^\alpha f(\xi) = \mathcal{E}_{\alpha,r}(f,\ 1)(\xi) + G_\alpha(f\chi_{\partial D})(\xi)$

以上の補題2.2～2.13は［6］の§4の結果を用い、§5と同じ考えのもとに示すことができる。詳しいことは省くことにする。

§ 3 $\mathbb{P}$

補題 3.1 各 $\beta>0$ に対して、

$$\exists\ \hat{\hat{H}}_\beta : B(\xi) \longrightarrow L^\infty(\partial D, \nu) \quad \text{such that}$$

(1) bounded linear (2) positive

(3) $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f, g)(x) = H_\alpha K^\alpha(f\ \hat{\hat{H}}_\beta g)(x),\ \forall \alpha>0, \beta>0, x\in\xi.$

証明 $g \in B^+(\xi)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ を固定する。 [5] の P322 の proposition 3.4 より $\gamma \le \beta$ のとき $\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma$, $0<\beta<\gamma$ のとき、 $\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + (\gamma-\beta)\widehat{(U^0_\beta g\cdot dt)}_\gamma$, ここで、 $U^0_\beta g(x) = E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\beta t} d(\chi_D g\cdot dt)\right) \le \frac{\|g\|}{\beta}$ 従って、いずれの場合も、 $\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + \frac{|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\widehat{(dt)}_\gamma \ll \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\,\Phi$

従って、 [2] の P13 の 定理 1.7 より $0 \le \exists\ \tilde{H}_\beta g \le \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|$

$$\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \tilde{H}_\beta g\cdot\Phi$$

そこで、 $\hat{\hat{H}}_\beta g \equiv \tilde{H}_\beta g - \mathbb{Q}\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)$ とおくと、 補題 2.8, 2.10 より $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f, g)(x) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g) - \mathcal{E}^d_{\alpha,\beta}(f, g)(x)$

$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, \tilde{H}_\beta g(x_t) d\Phi\right) - E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, \mathbb{Q}\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)(x_t) d\Phi\right)$

$= H_\alpha K^\alpha(f\ \hat{\hat{H}}_\beta g)(x).$

$g\in B^+(\xi)$ に対して定義された $\hat{\hat{H}}_\beta$ を $B(\xi)$ にまで拡張することはわけがなく、 $\mathbb{Q}1 \le 1$ （補題 2.1）と $\tilde{H}_\beta g$ の評価式より、 $\hat{\hat{H}}_\beta$ は $B(\xi)$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への bounded linear operator となり、結論の (1), (3) はみたされ、(2) は (3) と $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}$ の定義式より分る。

<u>補題3.2</u>　　$f,\ g\in B(\mathfrak{S}),\quad \alpha>0,\ \beta>0$ に対して、

$$\frac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1}(x)=\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}(x)\ \ \forall x\in D \implies \hat{\hat{H}}_\alpha f=\hat{\hat{H}}_\beta g$$

<u>証明</u>　$\forall k\in C(\mathfrak{S})$ fix. 補題2.4より、仮定の下で、
$\mathcal{E}^c_{\gamma,\alpha}(k,f)(x)=\mathcal{E}^c_{\gamma,\beta}(k,g)(x)\ \forall x\in\mathfrak{S}$. 従って、補題3.1より
$H_\gamma K^\gamma(k\,\hat{\hat{H}}_\alpha f)(x)=H_\gamma K^\gamma(k\,\hat{\hat{H}}_\beta g)(x)\ \forall x\in\mathfrak{S}$. これより、
$\hat{\hat{H}}_\alpha f=\hat{\hat{H}}_\beta g$ が従う。

<u>定理3.1</u>　　<u>$(\mathbb{P})$</u>

$$\mathfrak{M}\equiv\left\{\varphi\in B(D);\ \exists\alpha>0,\ \exists f\in B(\mathfrak{S})\ s.t.\ \varphi=\frac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1}\right\}$$

とおくとき、

(1)　$\mathfrak{M}$ は $B(D)$ の linear subspace であり、1_D を含む。

(2)　$\exists\,\mathbb{P}:\overline{\mathfrak{M}}\longrightarrow L^\infty(\partial D,\nu)$　s.t.

(イ) bounded linear　　(ロ) positive

(ハ) $\mathfrak{M}\ni\varphi=\dfrac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1}$ に対しては、$\mathbb{P}\varphi=\hat{\hat{H}}_\alpha f$

(ニ) $\mathbb{P}1=m$

<u>証明</u>　(1) は $\{G^0_\alpha;\alpha>0\}$ が resolvent equation をみたすことより。
(2) は、補題3.2より、$\mathbb{P}\left(\frac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1}\right)\doteqdot\hat{\hat{H}}_\alpha f$ が well-defined となり、$\hat{\hat{H}}_\alpha$ の linearity より $\mathbb{P}$ が $\mathfrak{M}$ において linear となる。
$\mathbb{P}$ の $\mathfrak{M}$ における positivity は、$\forall k\in C^+(\mathfrak{S})$ に対して、補題2.4より、$G^0_\beta f\ge 0$ のとき、$\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(k,f)(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathfrak{S}$. 従って、
補題3.1と $\mathbb{P}$ の定義より　$H_\alpha K^\alpha\{k\,\mathbb{P}(\frac{G^0_\beta f}{G^0_\gamma 1})\}(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathfrak{S}$.

この関係は $h \in B^+(\partial)$ に対しても成り立つので、$\mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \geq 0$ となる。$\mathbb{P}$ の ($\mathfrak{m}$ における) boundedness は $\mathbb{P}$ の linearity と positivity があるから、$\mathbb{P}1 = \mathfrak{m}$ を示せばよいが、$\mathbb{P}1 = \mathfrak{m}$ は補題2.13より分る。従って、あとは $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ を $\overline{\mathfrak{m}}$ にまで拡張すればよい。

系 3.1 $\quad f, g, h \in B(\partial), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad x \in \partial$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f, g, h)(x) = H_\alpha K^\alpha \left\{ f g\, \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right)\right\}(x)$$

補題 3.3 $\quad f \in B^+(\partial), \quad \alpha > 0$

$$\widehat{(\chi_D f \cdot dt)}_\alpha \approx (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \cdot \Phi$$

証明 補題2.8, 2.10, 系3.1 より。

定理 3.2 (Feller－上野 分解)

$$f \in B(\partial), \quad \alpha > 0, \quad x \in \partial.$$

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha \left\{ \ell f + (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right)\right\}(x)$$

証明 $f \in B^+(\partial)$ で十分。

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) - G_\alpha^0 f(x) &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) \qquad ((M.3)) \\ &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D} f(x_t)\,dt\right) + E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}\chi_D f(x_t)\,dt\right) \\ &= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D} f(x_t)\,dt\right) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, d\,\widehat{(\chi_D f \cdot dt)}_\alpha\right) \end{aligned}$$

従って、補題2.9, 3.3 より定理3.2を得る。

補題3.4 $f\in C(S)$, $h\in B(S)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\varepsilon>0$ fix.

$\{\xi\in\partial D;\ f(\xi)\neq 0\}\ni\forall\xi$ $\quad \xi\in\exists U$ open subset of S s.t.

$U\cap D\ni\forall x$ $\quad \left|\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x)\right|<\varepsilon$

$$\Rightarrow\quad \left|H_\alpha K^\alpha\left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}\right)\right)(x)\right|$$

$$\le \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha(|f|\cdot|g|\cdot\mathbb{P}1)(x),\quad \forall x\in S,\ \forall g\in C(S).$$

証明 補題2.4, 系3.1 より、

$$H_\alpha K^\alpha\left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}\right)\right)(x)$$

$$=\lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)}\chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G^0_\beta h(x_{R_n(k)})\right) \qquad ①$$

一方、$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)}\chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G^0_\beta h(x_{R_n(k)})\right)$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)}\chi_D f(x_{R_n(k)-})\ \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}\cdot G^0_\gamma 1(x_{R_n(k)})\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)}\chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)})\, E_{x_{R_n(k)}}\left(\int_0^{\sigma} e^{-\gamma t}1(x_t)dt\right)\right) \quad ((M.3))$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)}\chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)})\int_{R_n(k)}^{\sigma_{n}(k)} e^{-\gamma(t-R_n(k))}1(x_t)dt\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{\Delta\in T_k} e^{-\alpha P(k,\Delta)}\chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{P(k,\Delta)})\int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))}1(x_t)dt\right) \quad ②$$

そして、$\sum_{\Delta\in T_k} e^{-\alpha P(k,\Delta)}\chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{P(k,\Delta)})\int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))}1(x_t)dt$

$$=\sum_{\Delta\in T_c}\chi(\Delta\in T_k)\, e^{-\alpha P(k,\Delta)}\chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{P(k,\Delta)})\int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))}1(x_t)dt$$

$$+\sum_{\Delta\in T_d}\chi(\Delta\in T_k)\, e^{-\alpha P(k,\Delta)}\chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{P(k,\Delta)})\int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))}1(x_t)dt$$

$$= \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k \qquad ③$$

とおくと、

$$|\mathrm{I}_k|,\ |\mathrm{II}_k| \le \frac{\|f\|\cdot\|g\|\,\left\|\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}\right\|}{\alpha\wedge\gamma} \qquad ④$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}|\mathrm{I}_k| \le \sum_{\Delta\in T_c}\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\chi(\Delta\in T_k)e^{-\alpha P(k,\Delta)}\chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\chi_D g\frac{G^0_\beta h}{G^0_\gamma 1}(x_{P(k,\Delta)})\int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))}1(x_t)dt\right) \quad ⑤$$

[6] の P83の [4.8], [4.9] より、$s \in T_c$ であるから、

$$\rho(k,s) \longrightarrow \tau(s-) \qquad ⑥$$

$$x_{\rho(k,s)-} \longrightarrow x_{\tau(s-)-} \in \partial D \qquad ⑦$$

$$x_{\rho(k,s)} \longrightarrow x_{\tau(s-)} = x_{\tau(s-)-} \qquad ⑧$$

& [6] の P83 の [4.7] より $T_k \longrightarrow T$ ⑨

$f(x_{\tau(s-)-}) \neq 0$ のとき、$\xi = x_{\tau(s-)-} \in \partial D$ に対して、仮定を用いると、${}^\exists U$ open $\ni \xi$, $D \cap U \ni {}^\forall y$ $\left|\frac{G^0_\beta R}{G^0_\gamma 1}(y)\right| < \varepsilon$

⑧より kを十分大きくとると、$x_{\rho(k,s)} \in D \cap U$ $(k \in T_k)$

従って、k を十分大きくとると、$\left|\frac{G^0_\beta R}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,s)})\right| < \varepsilon$

従って、このことと、⑥,⑦,⑨ と f, g の連続性より、

$$\sum_{s \in T_c}\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \chi(s \in T_k) e^{-\alpha\rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| \left|\chi_D g \frac{G^0_\beta R}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,s)})\right| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-r(t-\rho(k,s))} 1(x_t)\,dt\right)$$
$$\leq \varepsilon \sum_{s \in T_c}\left(\lim_{k\to\infty} \chi(s \in T_k) e^{-\alpha\rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| |\chi_D g (x_{\rho(k,s)})| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-r(t-\rho(k,s))} 1(x_t)\,dt\right)$$
$$= \varepsilon \sum_{s \in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| \, |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-r(t-\tau(s-))} 1(x_t)\,dt) \qquad ⑩$$

一方、③の第二項 II_k については、[6] の P84 の [4.15] より、

I_k と同じ考え方により、$\overline{\lim_{k\to\infty}} |II_k| = 0$ ⑪

従って、①、②、③、④、⑩、⑪ より、

$$|H_\alpha K^\alpha (f g \mathbb{P}(\tfrac{G^0_\beta R}{G^0_\gamma 1}))(x)|$$
$$\leq \varepsilon \; E_x\left(\sum_{s \in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-r(t-\tau(s-))} 1(x_t)\,dt\right)$$
$$= \varepsilon \; \mathcal{E}^c_{\alpha r}(|f|, |g|, 1)(x)$$
$$= \varepsilon \; H_\alpha K^\alpha(|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{P} 1_D)(x) \qquad (系3.1) \quad \forall x \in S.$$

<u>定理 3.3</u> (<u>quasi-local caracter of $\mathbb{P}$</u>)

$\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi, \quad \varepsilon > 0 \quad$ fix.

$\partial D \subset {}^{\exists} U$ open subset $\subset \mathfrak{S}$ s.t. $U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad |\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D.$$

<u>証明</u> $\mathfrak{M} \ni \varphi$ に対して示せば十分である。$0 \leq {}^{\exists}f_0 \leq 1$, $f_0 \in C(\mathfrak{S})$, $f_0(\xi) = 1$, $\xi \in \partial D$. このとき、$\{\xi \in \partial D;\ f_0(\xi) \neq 0\} = \partial D$. 従って、補題 3.4 より、${}^{\forall}g \in C(\mathfrak{S})$, ${}^{\forall}x \in \mathfrak{S}$

$$|H_\alpha K^\alpha(f_0\, g\, \mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha(|f_0|\,|g|\,\mathbb{P}1)(x)$$

$f_0|_{\partial D} = 1$ ゆえ、$|H_\alpha K^\alpha(g\mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha(|g|\mathbb{P}1)(x)$

この不等式は ${}^{\forall}g \in B^+(\mathfrak{S})$ に対して成り立つから、

$$|\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon\, \mathbb{P}1(\xi) \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e. } \xi.$$

(補題 2.1, 定理 3.1 の (2) の (⇐))

<u>系 3.2</u> $\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$;

${}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \partial D \subset {}^{\exists}U$ open subset $\subset \mathfrak{S}$ s.t.

$U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$$

<u>系 3.3</u> $\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$; $\partial D \subset {}^{\exists}U$ open subset $\subset \mathfrak{S}$ s.t.

$U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad \varphi(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$$

<u>補題3.5</u>　　$\alpha>0$ fix.　　$f_m \in B(S)^+$, $G_\alpha^0 f_m \underset{(m)}{\uparrow}$

このとき、$\forall f \in C^+(S)$, $\forall x \in S$.

$$H_\alpha K^\alpha (f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\tfrac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}))(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)})\ G_\gamma^0 1(x_{R_n(k)}))\ (\leq +\infty)$$

<u>証明</u>　[6] の p82 の (a) の $\rho(k)$ として、$\rho(k) \equiv \frac{1}{k} \wedge \sigma_{D_R} \wedge \inf\{t\,;\, dist(x_t, x_0) \geq \frac{1}{k}\}$ $(k=1,2,\cdots)$ をとると、$\rho(k) \geq \rho(k+1)$　①

をみたす。$\forall f \in C^+(S)$ fix. 補題2.4, 系3.1より、

$$H_\alpha K^\alpha (f\ \mathbb{P}(\tfrac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}))(x) = \lim_{k\to\infty} E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})) \qquad ②$$

であるから、仮定より、各 k をとめたとき、

$$E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})) \text{ は } \underset{(m)}{\uparrow} \qquad ③$$

一方、$E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)}))$

$$= E_x (\sum_{n=1}^{\infty} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \int_{R_n(k)}^{\sigma_{n+1}(k)} e^{-\alpha t} f_m(x_t)\, dt)$$

であるから、① と $\{R_n(k)\}$, $\{\sigma_n(k)\}$ の定義と $f \geq 0$, $f_m \geq 0$ より、

各 m をとめたとき、$E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)}))$ は $\underset{(k)}{\uparrow}$　④

従って、②, ③, ④ より、$\mathbb{P}$ の positivity を使って、

$$H_\alpha^\alpha K^\alpha (f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\tfrac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}))(x)$$

$$= \lim_{m\to\infty} H_\alpha K^\alpha (f\ \mathbb{P}(\tfrac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}))(x) \qquad (\text{ monotone convergence})$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x (\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)})\ G_\gamma^0 1(x_{R_n(k)}))$$

が成り立つ。

§4　$\mathcal{D}(\mathbb{P})$

前章の定理3.1において、$\overline{\mathfrak{M}}$ 上で定義され、値を $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中に取る有界線型作用素 $\mathbb{P}$ を導入し、定理3.3によって、$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ との相異は「$\mathbb{P}$ が境界近くでの quasi-local character property をもち、$\mathbb{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の有界な核である」という事は分ったが、実際問題として、定理3.2 の resolvent の分解式から、$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ の完全なる分離を行うには、$\mathcal{D}(\mathbb{P}) = \overline{\mathfrak{M}}$ の考察が必要である。

定理4.1　仮定(※1)：$C_\infty(D) \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$

の下で、$\mathbb{P}C_\infty(D) = \{0\}$ である。

証明　系3.3より、$\mathbb{P}C_0(D) = \{0\}$ が分り、$C_0(D)$ が $C_\infty(D)$ で稠密なことと、$\mathbb{P}$ の boundedness より、$\mathbb{P}C_\infty(D) = \{0\}$ が成立する。

それでは、$C_\infty(D) \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$ はいかなる条件の下で成り立つのであろうか？　それに答えるのが次の定理である。

定理4.2

$\{G^0_\alpha ; \alpha > 0\}$ は D上の diffusion に対応する resolvent とし、(1) $G^0_\alpha(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$　(2) $G^0_\alpha 1 \in C(D)$ を仮定するならば、$C_\infty(D) \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$ が成り立つ。

証明は省略する。(Hille-Yoshida の定理を使う。)

§5 $\mathbb{P}$の表現 (I)

今までの章とは離れて、一般的な事実を証明する。

D を第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff 空間とし、$(V, \mathcal{F}, \nu)$ を測度空間とする。

$\{G_\alpha^0 ; \alpha > 0\}$: a family of resolvents

$$\begin{cases} G_\alpha^0 : B(D) \longrightarrow B(D) \\ \text{(i) linear (ii) positive (iii) } \alpha G_\alpha^0 1 \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad G_\alpha^0 - G_\beta^0 + (\alpha - \beta) G_\alpha^0 G_\beta^0 = 0 \\ \text{(v)} \quad f \in C_\infty(D) \text{ に対して、} \alpha G_\alpha^0 f(x) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} f(x) \quad (x \in D) \\ \text{(vi)} \quad G_\alpha^0 (C_\infty(D)) \subset C_\infty(D) \\ \text{(vii)} \quad \exists \gamma > 0 \ \text{s.t.} \quad G_\gamma^0 1 \in C_\infty(D), \quad G_\gamma^0 1(x) > 0, \forall x \in D. \end{cases}$$

が与えられたとする。

$$\mathfrak{M} \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in B(D) \right\}$$

$$\mathfrak{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in C_\infty(D) \right\}$$

補題5.1

(1) $\mathfrak{M} \subset B(D)$, linear subspace, $\ni 1$.

(2) $\mathfrak{M}_\infty \subset \mathfrak{M} \cap C(D)$, linear subspace, Dの点を分離する。

補題5.2

$$C_0(D) \supset \exists C' \quad \text{高々可算集合} \quad \text{s.t.}$$

(1) $f, g \in C'$, a, b 有理数 $\Rightarrow a f + b g \in C'$

(2) C' は $C_0(D)$ において稠密 (sup norm で)

<u>証明</u> K. Ito [7] の P296 の lemma 2.

<u>補題 5.3</u>

$\mathfrak{M}_\infty \supset {}^\exists \mathfrak{M}'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}'$, a, b 有理数 $\Rightarrow a\varphi + b\psi \in \mathfrak{M}'$

(2) $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}_\infty$ において稠密 (sup norm で)

<u>証明</u> 補題 5-2 の C' をとり、$\mathfrak{M}' \equiv \left\{ \dfrac{G_r^0 f}{G_r^0 1} ; f \in C' \right\}$ が求めるものとなる。

<u>定理 5.1</u>

$$\mathbb{P} : \overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(V, \mathfrak{F}, \nu)$$

(1) bounded linear (2) positive (3) $\mathbb{P}1 \leq 1$

$\Longrightarrow$ V の各点 ξ に対して、D の $\mathfrak{M}_\infty$ - compact 化 D^* ([1] の p. 96) 上の有界な測度 (もちろん ≥ 0) $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2) をみたす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$ ${}^\exists \nu$-a.e. $\xi \in V$

$$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$$

但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in V$ $\mathbb{P}1(\xi) = \mu(\xi, D^*)$

証明は省く。(Hahn - Banach の定理を使う。)

補題5.4　$\alpha>0$, $f\in B(D)$ に対して、$G^1_\alpha f(x) \equiv \dfrac{G^0_\alpha(f\cdot G^0_0 1)(x)}{G^0_0 1(x)}$

とおくと、　$\{G^1_\alpha\ ;\ \alpha>0\}$ は

(1)　$G^1_\alpha(B(D))\subset B(D)$.　(2) linear　(3) positive　(4) $\alpha G^1_\alpha 1\le 1$

(5)　$G^1_\alpha - G^1_\beta + (\alpha-\beta)G^1_\alpha G^1_\beta = 0$　(6)　$G^1_\alpha(C(D))\subset C(D)$

(7)　$\forall f\in C(D)$　$\forall x\in D$　$\alpha G^1_\alpha f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$

(8) $\mathcal{R}\equiv\{G^1_\alpha f;\ \alpha>0,\ f\in C(D)\}$ は Dの点を分離する。

(9)　$\mathcal{R}$ は $C(D)$の linear subspace である.　(10) $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}_\infty$

(11)　$\overline{\mathcal{R}}=\overline{\mathcal{M}_\infty}$

証明は省く.（(11) は　$f\in C_\infty(D)$ に対しては、実は

$\alpha G^0_\alpha f \underset{\alpha\to\infty}{\Longrightarrow} f$　(一様)　が成り立つことよりでる。)

補題 5.5　Dの $\mathcal{M}_\infty$-compact化を D^* とする。

$f\in C(D^*)$, $\alpha>0$ に対して、$G^*_\alpha f\equiv[G^1_\alpha(f|_D)]^*$ とおく。

($G^1_\alpha(f|_D)\in\mathcal{R}\subset\mathcal{M}_\infty$ であるから、その連続拡大 $[G^1_\alpha(f|_D)]^*$ は

存在する。) このとき、$\{G^*_\alpha\ ;\alpha>0\}$ は

(1)　$G^*_\alpha(C(D^*))\subset C(D^*)$　(2) linear (3) positive (4) $\alpha G^*_\alpha 1\le 1$

(5)　$G^*_\alpha - G^*_\beta + (\alpha-\beta)G^*_\alpha G^*_\beta = 0$

(6)　$\alpha G^*_\alpha f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$　($f\in C(D^*)$,　$\underline{x\in D}$)

証明は省く。(どれも容易である。)

<u>補題 5.6</u> $\mathcal{R}^* \equiv \{g^*; g \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{M}^*_\infty \equiv \{g^*; g \in \mathcal{M}_\infty\}$
(g^* は g の連続拡大) とおくとき、

(1) $\mathcal{R}(G^*_\alpha) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{M}^*_\infty$

(2) $\overline{\mathcal{M}^*_\infty} = (\overline{\mathcal{M}_\infty})^*$, $\overline{\mathcal{R}^*} = (\overline{\mathcal{R}})^*$

(3) $\overline{\mathcal{R}(G^*_\alpha)} = \overline{\mathcal{R}^*} = \overline{\mathcal{M}^*_\infty}$

証明は省く。

<u>補題 5.7</u> $\mathcal{R}(G^*_\alpha)$ は 内部の点同志、entrance boundary の点 ($\in D^* - D$) 同志 を分離する。

<u>証明</u> $\mathcal{M}_\infty$-compact 化 の 定義 と 補題 5.5 の(6)、5.6 より。

<u>仮定 ($*_2$)</u> $\{f \in C(D^*)^+; \forall\alpha>0 \ \alpha G^*_{\alpha+1/2} f \leq f\}$ が D の点と $D^* - D$ の点とを 分離する。

<u>補題 5.8</u>

(1) D^* の各点 x に対して、次の性質をもつ substochastic 測度 $\mu_2(x, dy)$ が唯一つ存在する；

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x, dy) f(y) \qquad \forall f \in C(D^*)$$

(2) $\forall f \in C(D^*)$, $\forall\alpha>0$, $\forall x \in D^*$

$$G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x, dy)\, G^*_\alpha f(y)$$

(3) $\forall E$ Borel $\subset D^*$ に対して、$\mu_2(\cdot, E)$ は Borel 可測

(4) $D^*_b \equiv \{x \in D^*; \mu_2(x, dy) \neq \delta_x(dy)\}$ とおくとき、

D^*_b は F_σ-set であり、かつ $\forall x \in D^*$ に対して、

$$\mu_2(x, D_b^*)=0$$

(5) $D_b^* \subset D^* - D$

<u>証明</u>　補題5.7と我々の仮定($*_2$)より $\{G_\alpha^*; \alpha>0\}$ が Ray の仮定をみたすから、[9]．より。（D^*は compact metizable space である。）　(5)は補題 6.5 の (6) より。

<u>定理 5.2</u>

$$\mathbb{P} : \overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(V, \mathcal{F}, \nu)$$

(1) bounded linear　(2) positive　(3) $\mathbb{P}1 \leq 1$

$\Rightarrow$　Vの各点ξに対して、D^*上の(有界)測度$\mu(\xi, d\eta)$が存在して、次の(1),(2),(3)を満たす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　ν-a.e. $\xi \in V$　$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$

但し、φ^*はD^*上へのφの連続拡張函数である。

(2) ν-a.e $\xi \in V$　$\mu(\xi, D^*) \leq \mathbb{P}1(\xi)$

(3) $\forall \xi \in V$　$\mu(\xi, D_b^*) = 0$

上の(1),(2),(3)をみたす$\mu(\xi, d\eta)$はν−測度0のξを除いて一意である。

<u>証明</u>　定理5.1によって得た測度を$\mu_1(\xi, d\eta)$とし、補題5.8の$\mu_2(\eta, d\eta')$を使って、各点$\xi \in V$に対して、

$$\mu(\xi, E) \equiv \int_{D^*} \mu_1(\xi, d\eta)\, \mu_2(\eta, E) \qquad (E \ \text{Borel} \subset D^*)$$

とD^*上の有界測度を作る。これが求めるものであることは

補題5.8より分る。一意性も $D^* - D^*_b \ni \forall \eta$ に対して
$\alpha G^*_\alpha f(\eta) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(\eta)$ $(f \in C(D^*))$ (補題5.8の(ii))
が成り立つことより分る。

§6 $\mathbb{P}$の表現 (II)

今度は、§3までに戻り、$\{G^0_\alpha ; \alpha > 0\}$は§1のそれとし、
$V \equiv \partial D$, $\mathcal{F} \equiv$ Borel field, $\nu \equiv \Phi$の canonical measure とし、
§5における仮定を§6においてもおくことにする。即ち、
§5の(vi), (vii), 仮定($\aleph_2$)をおくのである。

補題6.1 ∂Dの各点ξに対して、$S_\xi \equiv \{\eta \in D^* ; \xi \in \forall U$ nbd に於, $\overline{U \cap D} \ni \eta\}$ (closure は D^*においてn) とおくと、

(1) $S_\xi = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\{x \in D ; dist(x, \xi) < \varepsilon\}}$ (closure は D^*において)

(2) $S_\xi \subset D^* - D$

証明 (1)は明白である。(2)は DがD^*の中へ homeo に入っていることによる。

補題6.2 $\mathcal{L}_+ \equiv \{f \in C(D^*)^+ ; \forall \alpha > 0 \ \ \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \leq f\}$
$\mathcal{L} \equiv \{f_1 - f_2 ; f_1, f_2 \in \mathcal{L}_+\}$ とおく。

(1) $\{G^*_{\frac{1}{2}} f ; f \in C(D^*)^+\} \subset \mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L} \subset C(D^*)$

(2) $\mathcal{L}$は$C(D^*)$の vector lattice で、1を含み、D^*の点を分離する

(3) $\overline{\mathcal{L}} = C(D^*)$

(4) $\mathcal{L}_+ \ni \forall f \qquad \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \underset{(\alpha)}{\uparrow}$

<u>証明</u> (1) は補題 5.5 の (5) より。(2) は $\mathcal{L}_+$ について、$\mathcal{L}_+ \ni f, g \Rightarrow f+g,\ f \wedge g,\ af \in \mathcal{L}_+ \ (a \geq 0),\ \mathcal{L}_+ \ni 1$ をみたすことによる。D^*の点を分離することは、補題 5.7 と仮定 $(\mathcal{X}_2)$ による。(3) は Stone-Weierstrassの定理である。(4) は補題 5.5の (5)より分る。

<u>定理 6.1</u>　　(<u>$\mu(\xi, d\eta)$ の support</u>)

$$\nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D \text{ に対して、} \mu(\xi, D^* - S_\xi) = 0$$

<u>証明</u>　最後まで述べたいのですが、かなり長く、面倒なので省略します。(頁数も多くなったので)。key pointは補題3.5で、補題6.2の(3)をうまく使うことにあります。

以上、証明を省略した所は、どこかに発表されると思います。

<u>文献</u>

[1] C. Constantinescu and A. Cornea ; Ideale Ränder Riemannscher Flächen , Springer-Verlag, 1963

[2] K. Kunita, K. Sato, M. Fukushima and M. Motoo ; 拡散過程と境界上のマルコフ過程 , Seminar on Probability Vol. 22, 1965

[3] M. Motoo ; Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov processes

Scientific Papers of the College of General Education University of Tokyo,
Vol.13, 1963, p143-159

[4] M. Motoo ; マルコフ過程の additive functional
Seminar on Probability, Vol.15, 1963

[5] M. Motoo ; The sweeping-out of additive functionals and processes on the boundary.
Ann. Inst. Stat. Math., 16(1964), 317-345

[6] M. Motoo ; Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes (Lévy system of U-processes), Proc. 5-th. Berkely Symp., Vol.2, 1967, P75-110

[7] K. Ito ; 確率論 (岩波) 1953

[8] Robert R. Phelps; Lectures on Choquet's Theorem.
D. Van Nostrand Company, Inc. 1966

[9] D. Ray ; Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. Ann. of Math. (2), 70(1959), 43-72

[10] K. Sato ; A decomposition of Markov processes,
J. Math. Soc. Japan, Vol.17, NO.3, 1965, P 219-243

[11] S. Watanabe; On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japan. J. Math., Vol.34 (1964), 53-70