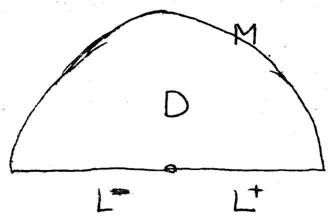
数理解析研究所講究録
57巻 1968年 72-77

Discontinuous Inclined Derivative

教育大理　本尾　実

§1. Dynkin, Malyutov の結果

$r_0 > 0$ に対して



$D = \{(x,y): x^2+y^2 < r_0^2 \quad y > 0\}$

$M = \{(x,y): x^2+y^2 = r_0^2 \quad y \geq 0\}$

$L^+ = \{(x,0): 0 < x < r_0\}$

$L^- = \{(x,0): 0 > x > -r_0\}$

$L = L^+ \cup L^-$

とおく。Dynkin [1] Malyutov [2] の結果を局所的な問題に限ると次のようになる。$p(x)$, $q(x)$ を $L \cup \{0\}$ 上 Hölder 連続 $q(x) \geq 0$, $p(x)^2 + q(x)^2 = 1$ on $L \cup \{0\}$, $p(x) \neq 0$ on L, $\lim_{x \to 0} p(x) = 0$ をみたす関数とし，境界問題

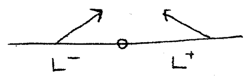
(1) $\quad \Delta u = 0 \quad$ in D

$\quad u = 0 \quad$ on M

$\quad p(x) \dfrac{\partial u}{\partial y} + q(x) \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

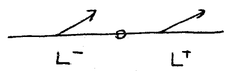
を考える。

[I] $p(x) < 0$ on L^+, $p(x) > 0$ on L^-



のとき、二つの有界な一次独立な(1)の解 u_+ 及び u_- が存在し $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\in L^i}} u_j(x) = \delta_{ij}$ $\quad i,j = +$ or $-$ をみたす。又任意の(1)の有界な解は u_+ と u_- の一次結合である。

[II] $p(x) > 0$ on L のとき

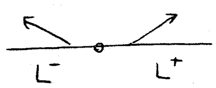


$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\in L^+}} u_+(x) = 0 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\in L^-}} u_+(x) = 1$ となる

有界な(1)の解が存在し、任意の有界な(1)の解は u_+ の定数倍である。

[II′] $p(x) < 0$ on L のときは [II] と同様。

[III] $p(x) > 0$ on L^+, $p(x) < 0$ on L^-



のとき(1)には有界な解は存在しない。(0を除いて。)

(註) Dynkin [1] では非負で必ずしも有界でない解も研究されている。

§2 問題

境界問題

(2) $\quad \Delta u = 0 \quad$ in D

$$u = 0 \quad \text{on } M$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{on } L$$

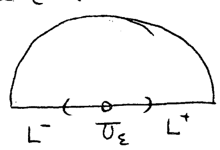
の $\mathcal{Y} = C(\bar{D} - \{0\}) \cap C^2(D) \cap C^1(D \cup L)$ に属する有界な解の全体を $\mathfrak{H}$ とする。$a(x)$ が(原点も含めて) $L \cup \{0\}$ で Hölder 連続なら $\mathfrak{H} = \{0\}$ であることはよくしられている。§1 では $\lim_{x \to 0} |a(x)| = \infty$ の場合が問題であった。(I), (II) (II′) では $\mathfrak{H} \neq \{0\}$ (III)では $\mathfrak{H} = \{0\}$ である。ここでは $a(x)$ が有界でも $a(x)$ の原点に於ける Hölder 連続性がなくなると $\mathfrak{H} \neq \{0\}$ のおこり得ることを示す。(rough に云うと, $\mathfrak{H} \neq \{0\}$ のときは (2) に対応するマルコフ過程が正の確率で原点に近づくことを示す。$\mathfrak{H} = \{0\}$ ならそのような確率は 0 である。)

§3. barrier による方法.

以下 $a(x)$ は L 上局所 Hölder 連続と仮定する。次の四つの lemma は基本的には Malyutov [2] に証明されている。

[lemma 1] $\varphi \geq 0$ を L 上有界な連続関数とし

$U_\varepsilon = \{(x, 0) : |x| < \varepsilon\}$ とおく。



$$(3) \qquad \begin{aligned} &\Delta u = 0 \quad \text{in } D \\ &u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } M \\ &u_\varepsilon = \varphi \quad \text{on } U_\varepsilon \\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + a(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = 0 \quad \text{on } L - U_\varepsilon \end{aligned}$$

の解 u_ε は唯一つ存在し，ε が減少すると u_ε も減少する。
今 $u = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ とおくと $u \in \mathcal{H}$ である。

[lemma 2] (4) $\Delta u \leq 0$ in D

$$u \geqq 0 \quad \text{on } \bar{U}_\varepsilon \cup M$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} \leq 0 \quad \text{on } L - \bar{U}_\varepsilon$$

をみたす $u \in \mathcal{D}$ は $\bar{D} - \{0\}$ で $u \geqq 0$ となる。

[lemma 3] $\mathcal{D}$ に属する有界な関数 v で

$\sup\limits_{D} v(x) > \sup\limits_{M} v(x)$, $\Delta v \geqq 0$ in D, $\frac{\partial v}{\partial y} + a(x)\frac{\partial v}{\partial x} \geqq 0$ on L

をみたすものが存在すれば $\mathcal{H} \neq \{0\}$。

[lemma 4] $\mathcal{D}$ に属する関数 w で $\lim\limits_{x\to 0} w(x) = \infty$,

$w \geqq -K > -\infty$ on M, $\Delta w \leq 0$ in D, $\frac{\partial w}{\partial y} + a(x)\frac{\partial w}{\partial x} \leq 0$ on L

をみたすものが存在すれば $\mathcal{H} = \{0\}$。

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とし ($r \geqq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

$$u_1 = \frac{1}{r} \qquad u_2 = \theta$$

$$u_3 = \frac{\log\frac{1}{r}}{(\log\frac{1}{r})^2 + (\theta - \frac{\pi}{2})^2} \qquad u_4 = \frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{(\log\frac{1}{r})^2 + (\theta - \frac{\pi}{2})^2}$$

とおく。

[Theorem 1] 定数 a が存在して, $r_0 < e^{-3\pi}, e^{-\frac{|a|}{2}\pi}$

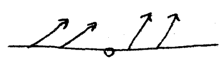
$$(5) \qquad a(x) - a < -\frac{2\pi(1+a^2)}{\log\frac{1}{|x|}} \quad \text{on } L^+$$

$$a(x) - a > \frac{2\pi(1+a^2)}{\log\frac{1}{|x|}} \quad \text{on } L^-$$

が成立すれば $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ である。

証明は条件(5)のもとで, $v = au_4 - u_3$ が lemma 3 の条件をみたすことを用いる。(r_0 に関する条件は本質的でない。)

[例1] $a(x) \equiv a_+$ on L^+, $a(x) \equiv a_-$ on L^-,



$a_+ < a_-$ なら $\mathfrak{h} \neq \{0\}$

[例2]
$$a(x) = \begin{cases} a - \dfrac{c}{\log\frac{1}{|x|}} & \text{on } L^+ \\ a + \dfrac{c}{\log\frac{1}{|x|}} & \end{cases} \qquad (c > 2\pi(1+a^2))$$

なら $\mathfrak{h} \neq \{0\}$。この例は $a(x)$ が原点で連続でも $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ のおこり得ることを示している。

[Theorem 2] $r_0 < e^{-\pi}$, 実数 a が存在して

$$(6) \qquad a(x) - a > -\frac{\pi(1+a^2)}{(\log\frac{1}{|x|})^3} \quad \text{on } L^+$$

$$a(x) - a < \frac{\pi(1+a^2)}{(\log\frac{1}{|x|})^3} \quad \text{on } L^-$$

が成立すると $\mathfrak{h} = \{0\}$ である。

証明は $w = u_1 + au_2 - u_3 + au_4$ が lemma 4 の条件をみたす

ことを用いる。この定理から $a(x)$ が原点で Hölder 連続でなくても $\mathcal{L}_g=\{0\}$ となり得ることがわかる。$\mathcal{L}_g=\{0\}$ のための必要充分条件はわからない。

$a(x)$ が有界のとき §1 の結果と非常に異なる点は $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to L^-}} u(x)=0$（又は $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in L^+}} u(x)=0$）をみたす(2)の解は 0 に限ることが、barrier $v=r^{-p}\sin p\theta$ $(p>0)$ を用いると、わかることである。

[1] Dynkin E. B., Martin boundary and nonnegative solutions of boundary value problems with an oblique derivative. Uspehi Mat. Nauk SSSR vol 19 (1964) pp 3 ~ 50

[2] Malyutov M. B., Brownian motion with reflection and a problem with a directional derivative. Doklady Akad. Nauk (1964)