数理解析研究所講究録
57巻 1968年 49-71

Wentzell の境界条件をみたす Markov 過程

京大 理　志賀徳造

§.0

Wentzell型の境界条件をみたす拡散過程については、佐藤-上野の結果がある。それは、Wentzell型の境界条件をみたす拡散過程と、境界上のMarkov 過程が 1：1 に対応することを結論づけている。そこで、境界上のMarkov 過程が存在するための条件を、Wentzellの境界条件の中に条件化することが残された重要な問題であった。
最近、Courrège, Bony, Priouret は 拡散過程より広い枠組の中で、本質的には、微分方程式論の結果を用いることによって解決を与えている。
本報告は、この Courrége, Bony, Priouret の結果の紹介である。

§.1 Singular operator

D : N-dim orientable manifold (C^∞) の domain

$\overline{D}$ は compact, ∂D には C^3-class の滑らかさを仮定する。

$S(x,dy)$ が $\overline{D}$ 上の singular kernel であるとは、次の条件をみたす $\overline{D}\times\mathcal{B}_{\overline{D}}$ 上の kernel のことである。

(S_1) $S(x,\{x\})=0$, $S(x,dy)$ は dy について $\overline{D}-\{x\}$ 上の Radon measure

(S_2) 任意の local coordinate (U,χ) に対して、

$U\supset {}^\forall K$: compact

$$\int_K S(x,dy)\,|\chi(y)-\chi(x)|^2 \text{ は } U \text{ 上で有界}$$

関数の系 $\{\sigma_\alpha(x,y)\}_{(x,y)\in\overline{D}\times\overline{D}}$ を次のように構成して、以后これを fix する

(V_α) (U_α) は $\overline{D}$ の 2つの finite covering で $\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$

(U_α,χ_α) が local coordinate になるものを選ぶ。

$\left(U_\alpha\times U_\alpha,\ \overline{D}\times\overline{D}-\bigcup_\alpha \overline{V_\alpha}\times\overline{V_\alpha}\right)$ は $\overline{D}\times\overline{D}$ の finite covering

これに対応する 1 の分解を $(\sigma_\alpha(x,y), \rho)$ として

$\sum\sigma_\alpha \equiv \sigma$ とおき、これを locally unit function という。

$0\le\sigma\le 1$, $\quad \mathrm{supp}[\sigma_\alpha]\subset U_\alpha\times U_\alpha$,

$u \in C^1(\bar{D})$ に対して

$$\Theta_x u(y) \equiv \sum_{\alpha} \sigma_\alpha(x.y)\left[u(x) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x))\right]$$

によって定義された $\Theta_x u$ を1次のTaylor展開という。

次の形の作用素 S ($\mathcal{D}(S) = C^2(\bar{D})$) を singular operator という.

(S_1). $Su(x) = a(x)u(x) + \dfrac{\partial u}{\partial X} + \displaystyle\int_{\bar{D}} S(x.dy)(u(y) - \Theta_x u(y))$

(S_2). $S1 \leqq 0$

ここに, X は vector field on $\bar{D}$ である.

さらに、$S\ ;\ C^2(\bar{D}) \longrightarrow C(\bar{D})$ continuous を仮定する。

A を $\bar{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order とする.

ここで取り扱うMarkov過程の特性作用素は次の形のものである.

$$A + S = W$$

W は elliptic operator に関する最大値原理がそのまゝ成り立つことを示そう.

<u>Prop. 1</u>

$u \in C^2(\bar{D})$ $\quad \sup u = u(x_0) \geqq 0 \quad {}^\exists x_0 \in D$

ならば,

$Wu(x_0) \leqq 0$

☺ $Au(x_0) \leqq 0$ はよく知られている

$$Su(x_0) = a(x_0)u(x_0) + \int_{\bar{D}} s(x_0, dy)\,(u(x_0) - \sigma(x_0, y)\,u(x_0))$$
$$= u(x_0)\,S1(x_0) \leqq 0$$

Prop. 2

$u \in C^2(\bar{D})$ $\quad Wu \geqq 0$ in $\bar{D}$

$\sup u = u(x_0) \geqq 0, {}^{\exists} x_0 \in D$ ならば uは定数である.

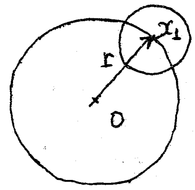
☺ $D \subset R^n$ の場合に示せば、manifold の場合に修正することは容易.

今、uが定数でないと仮定しよう.

$M = \{x \in \bar{D}\,;\, u(x) = \sup u\} \neq \bar{D}$ だから、Mと唯一点で接する閉球が存在する. その球を$B(0, r)$としてよい.

$B(0, r) \cap M = \{x_1\}$, $|x_1| = r$

その時、次のような関数が存在する.



$v \geqq 0$ in $B(0, r)$

$v \leqq 0$ in $B(0, r)^c$

$Wv(x_1) > 0$

このvは次のようにして構成される.

$v_K(x) = e^{-K|x|^2} - e^{-Kr^2}$ は前の2条件をみたしている.

更に、Av_K を具体的に計算すれば、Aが uniformly elliptic ($\bar{D}$: compact) より下からの評価がえられ、更に singular kernelの性質を考慮して，Kを定めればよい。

この v に対して，

$\exists \alpha > 0$, $Wv(x) > 0$ in $x \in B(x_1, \alpha)$

$u_\lambda(x) \equiv u(x) + \lambda v(x)$ $(\lambda > 0)$ とおけば，$Wu_\lambda(x) > 0$

$x \in B(x_1, \alpha)$

ところが u_λ は $B(0, r) \cap B(x_1, \alpha)$ で supをattain

するように，λをえらぶことができる

i.e. $\sup_{x \in B(0,r) \cap B(x,\alpha)^c} u(x) < \sup u$, $u_\lambda(x_1) = \sup u$ に注意すれ

ばよい。

ところが，これはProp. 1 に矛盾する。

Prop. 3

$u \in C^2(\overline{D})$ $Wu(x) \geqq 0$, $x \in \overline{D}$,

$u(x_1) = \sup u$ $\exists x_1 \in \partial D$ ならば，uは定数であるか，

又は $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0$ （ここに n は内向き法線を表わす）

（証明 略）

Prop. 3 の証明は Prop. 2 と殆んど同じ方法で出来る。

（注） Prop. 1 より Wは $C(\overline{D})$ の中で closable である

$\{W, \mathcal{D}(W) = C^2(\overline{D})\}$ の closure を $\overline{W}$で表わす。

§2 Minimal resolvent

k回導関数がλ次Hölder continuousであるような関数の空間は，適当なノルム（Hölder norm）によりBanach空間になる
その空間を $C^{k,\lambda}$ によって表わす．
次の事実は微分方程式論において基本的である．

Lemma. 1 [Dirichlet問題]

Aを class $C^{0,\lambda}$ の elliptic operator とする（i.e $A: C^{2,\lambda} \to C^{0,\lambda}$）
そのとき

$$
\begin{aligned}
C^{2,\lambda}(\bar{D}) &\longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial D) \\
u &\longmapsto (Au, [u]_{\partial D})
\end{aligned}
$$

は isomorph である
（1:1 ontoの意）

Lemma. 2 [oblique derivativeをもつ境界問題]

τを∂D上の class $C^{1,\lambda}$ なる vector field とする
$\mu \in C^{1,\lambda}(\partial D)$ ならば

$$
\begin{aligned}
C^{2,\lambda}(\bar{D}) &\longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{1,\lambda}(\partial D) \\
u &\longmapsto \left(Au, \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)
\end{aligned}
$$

は isomorph である．

次に Index theorem の簡単な形を述べる．
E，F，各々をBanach空間
TをEからFへの有界operatorとする．
もし，$\dim[\mathrm{Ker}(T)] < +\infty$，$\mathrm{codim}[\mathrm{Im}(T)] < +\infty$

ならば"Tは index をもつ"といい.

$\chi(T) \equiv \dim[\mathrm{Ker}(T)] - \mathrm{codim}[\mathrm{Im}(T)]$ を Tの index.

という。

Lemma. 3

$T : E \longrightarrow F$ bdd. かつ isomorph.

$K : E \longrightarrow F$ compact operator そのとき $T+K$ は

"index 0"をもつ.

∵ T^{-1} は $F \to E$ への bdd op. であるから. $T^{-1} \cdot K \equiv H$ は

$E \longrightarrow E$ への compact operator.

従って $I+H$ が"index 0"をもつことがわかればよい

H; compact だから $\dim[\mathrm{Ker}(I+H)] = \dim[\mathrm{Ker}(I+H^*)] < +\infty$

$\dim[\mathrm{Ker}(I+H^*)] = \dim[f \; ; \; (f, (I+H)x) = 0, \; x \in E]$

$= \mathrm{codim}[(I+H)x, \; x \in E]$

従って $I+H$ は"index 0"をもつ.

Theorem 1

S ; $C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$ continuous.

その時. $\forall \alpha > 0$ に対して

$C^{2,\lambda}(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial D)$

$u \longmapsto ((W-\alpha)u, [u]_{\partial D})$ は isomorph である

∵ S は $C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D})$ への compact operator

$u \rightsquigarrow ((W-\alpha)u, [u]_{\partial D})$ は次の三つの写像の和である。 (1) $u \rightsquigarrow (Au, [u]_{\partial D})$ (2) $u \rightsquigarrow (Su, 0)$ (3) $u \rightsquigarrow (-\alpha u, 0)$ (1) は isomorph. (2), (3) は compact だから, Lemma. 3 により, $u \rightsquigarrow ((W-\alpha)u, [u]_{\partial D})$ は "index 0" をもつ.

故に, 1:1 を示せれば, この定理は証明出来たことになる.

$(W-\alpha)u = 0,\ [u]_{\partial D} = 0 \Rightarrow u = 0$ であることは, Prop. 1 より直ちにわかる。

(注) Th. 1 は $W1 \neq 0$ ならば, $\alpha = 0$ の時も正しい (∵ Prop. 2)

Theorem 2

(i). $\forall \alpha > 0$, $\forall f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = f \\ \qquad [u]_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ。

その solution を $u = G_\alpha^0 f$ と表わす.

(ii) G_α^0 は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator に拡張出来る.

(iii) $\forall f \in C(\bar{D})$ に対して $u = G_\alpha f$ は

$$\begin{cases} (\alpha - \overline{W})u = f \\ \qquad [u]_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

の unique solution である.

(iv) for $\forall f \in C_0 \equiv C(\bar{D}) \cap \{u ; [u]_{\partial D} = 0\}$

$\|\alpha G_\alpha^0 f - f\| \longrightarrow 0$ as $\alpha \to \infty$

∵

(i) は Th. 1 より明らか. (ii) は G_α が $C^{0,\lambda}(\bar{D})$ 上で positive sub Markov であることを示せば十分. それは Prop. 1 から容易にわかる。

(iii), W の closable だから. closure の定義により。

(iv) $f \in C_0^2(\bar{D})$ に対して, $(\beta - W)f \equiv g$ とおくと

$[f]_{\partial D}$ だから. $f = G_\beta^0 g$.

$$\|\alpha G_\alpha^0 f - f\| = \left\|\frac{\beta}{\alpha-\beta} G_\beta g\right\| + \left\|\frac{\alpha}{\alpha-\beta} G_\alpha^0 g\right\| \longrightarrow 0 \quad (\alpha \to \infty)$$

従って $f \in C_0(\bar{D})$ についても, 明らかに成り立つ.

Yosida-Hille の定理により. G_α^0 には $C_0(\bar{D})$ 上の continuous semi-group $\{T_t^0\}$ が対応する.

<u>Theorem 3</u>

(i). $\alpha > 0$, $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial D)$ に対して

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = 0 \\ u(x) = \varphi(x) \quad x \in \partial D \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution

をもつ. それを $u = H_\alpha \varphi$ と表わす

(ii) H_α は $C(\partial D) \longrightarrow C(\bar{D})$ への positive contraction operator に拡張出来る

(iii) $H_\alpha\varphi$ が $C^2(\overline{D})$ に属し、$H_\alpha\varphi$ が ∂D 上の点 x_0 で、nonnegative maximum をとれば、$H_\alpha\varphi$ は定数であるか、又は $\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha\varphi(x_0)<0$ である。

☺ (i), (ii) は Th.2 と殆んど同じ。

(iii) は Prop 3 より容易にわかる。

§.3 Wentzell の境界条件について.

S と同じようにして、境界上の singular operator T を定義する。

$\partial D \times \mathcal{B}_{\overline{D}}$ 上の kernel $t(x', dy)$ は、次の条件 (W_1), (W_2) をみたすとき、境界上の singular kernel という

(W_1) $t(x', \{x'\}) = 0$

$t(x', dy)$ は dy について $\overline{D}-\{x'\}$ 上の Radon measure

(W_2) $\forall(U, \chi)$; 境界を表現する local coordinate. に対し

$$\int_K t(x', dy)\left[\chi^N(y) - \sum^{N-1}\left(\chi^j(y) - \chi^j(x')\right)^2\right] \text{ は } U \text{ 上有界}$$

(ここに $\forall K$ は U の compact subset)

(注) 境界を表現する local coordinate (U, χ), $U\cap\partial D \neq \phi$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x\in\overline{D} & \text{ならば}, & \chi^N(x) \geqq 0 \text{ であって}, \\ x\in\partial D & \rightleftarrows & \chi^N(x)=0 \text{ なる座標系。}\end{array}\right.$$

境界を表現する座標系 (U, χ) は、各境界点に対して常に存在するので、境界点を含む local coordinate は、いつも

境界を表現するものを選んでおく。

次のように定義される $\Theta^*_{x'}u$ を境界上の1次のTaylor展開という。

$$\Theta^*_{x'}u(y) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x.y)\left[u(x) + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial \chi^j_\alpha}(x')(\chi^j_\alpha(y) - \chi^j_\alpha(x'))\right]$$

さらに、境界上の singular operator T は、次のように定義される。

$u \in C^2(\bar{D})$ に対し、

$$Tu(x') = \eta(x')u(x') + \frac{\partial u}{\partial Z}(x') + \int_{\bar{D}} t(x', dy)[u(y) - \Theta^*_{x'}u(y)]$$

$T1(x') \leqq 0 \quad \forall x' \in \partial D$、 ここに Z: vectorfield on ∂D

Def L がWentzellの境界条件であるとは

$\mathcal{D}(L) = C^2(\bar{D}) \ni u$ に対し

$$Lu(x') = Qu(x') + \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x')Wu(x') + Tu(x')$$

Q ; elliptic operator on ∂D.

$\mu \geqq 0 \quad \delta \geqq 0$

つぎに、以后考える L の class を設ける。

L ; "transversal"

$\Longleftrightarrow$ $\forall x' \in \partial D$ に対して

$\mu(x') > 0$ or $\delta(x') > 0$ or $t(x', D) = \infty$

L ; "w-transversal"

$\Longleftrightarrow$ $\forall x' \in \partial D$ に対して、 $\mu(x') + \delta(x') + |T1(x')| + t(x', D) \neq 0$

L : "(L.1) をみたす"

$\iff \begin{cases} Q : \text{uniformly elliptic on } \partial D \text{ かつ class } C^{0,\lambda} \\ \mu, \delta \in C^{0,\lambda}(\partial D) \\ T ; C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\partial D) : \text{continuous} \end{cases}$

L ; "(L.2) をみたす"

$\iff \begin{cases} Q = \dfrac{\partial}{\partial \tau} \quad \tau \text{ は class } C^{1,\lambda} \text{ の vectorfield on } \partial D \\ \mu, \delta \in C^{1,\lambda}(\partial D) \quad / \\ T ; C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{1,\lambda}(\partial D) ; \text{continuous} \end{cases}$

Prop. 4

$u \in C^2(\bar{D}) \quad \sup u = u(x') \geqq 0 \quad {}^{\exists} x' \in \partial D$

$\Longrightarrow \; Qu(x') + \mu(x') \dfrac{\partial u}{\partial n}(x') + Tu(x') \leqq 0$

∵ $Tu(x') \leqq 0$ は Prop 1 に同じ.

Prop. 5

L ; w-transversal $\quad u \in C^2(\bar{D}) \quad Lu \geqq 0, \; \sup u > 0$

$\Longrightarrow \; {}^{\exists} x \in \bar{D} \; ; \; u(x) = \sup u$ かつ $Wu(x) \leqq 0$

∵

D で sup を attain する時は, Prop. 1 から明らかだから.

∂D 上で sup を attain する時のみ考える. $x' \in \partial D$, $u(x') = \sup u$.

$$0 \leqq Lu(x') = \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{Qu(x')} + \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{\mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x')} + \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{Tu(x')} - \delta(x')Wu(x')$$

$\delta(x') \neq 0$ ならば, $Wu(x') \leqq 0$ よって x' をとればよい.

$\delta(x') = 0$ ならば $\mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') = 0$, $Tu(x') = 0$

$\frac{\partial u}{\partial n}(x') = 0$ ならば ~~Prop~~ $Au(x') \leqq 0$ $\therefore$ $Wu(x') \leqq 0$

そうでなければ $\mu(x') = 0$, ところが $Tu(x') = 0$ であることは L の transversality に矛盾する

<u>Prop. 6</u> (Prop. 5 の Corollary)

L: ω-transversal, $\beta > 0$

$u \in C^2(\bar{D})$ $Lu \geqq 0$, $(W-\beta)u \geqq 0$

$\Longrightarrow$ $u \leqq 0$

<u>Prop. 7</u>

$\forall x' \in \partial D$ に対して $\mu(x') + {}^{\prime}t(x', D) + |T1(x')| \neq 0$

$W1 \neq 0$ とする. その時 $u \in C^2(\bar{D})$, $Lu \geqq 0$, $Wu \geqq 0$

$\Longrightarrow$ $u \leqq 0$

$\sup u > 0$ とする. もし D の中で sup を attain すれば

Prop. 2 より $u = \mathrm{const}$, $W1 \leqq 0$. $W1 \neq 0$ だから仮定に矛盾,

$\sup u = u(x') > 0$, $x' \in \partial D$ とすると

$\frac{\partial u}{\partial n}(x') < 0$ (by Prop. 3) 従って Prop. 5 と同様の議論により L の (ω)-transversality に矛盾する。

このProp 4〜7とIndexについてのLemma 3を用いれば、次の形のMain resultを得る。

Theorem. 4

A : uniformly elliptic on $\overline{D}$ かつ class $C^{0,\lambda}$

S ; $C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$ への continuous operator

L は "(L.1)をみたす".

$\Longrightarrow$

1°, $C^{2,\lambda}(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$

$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は "index 0" をもつ.

2°, さらに、L ; weak-transversal ならば, $\beta > 0$ に対し

$u \rightsquigarrow ((W-\beta)u, Lu)$ は isomorph である。

3° $\forall x' \in \partial D$ に対し、$\mu(x') + |T1(x')| + t(x', D) \neq 0$ で、

$W1 \neq 0$ ならば、$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は isomorph

(Proof)

まず $u \rightsquigarrow ((A-\beta)u, (Q-\beta))$ が isomorph であることを注意しよう。このmapは、$u \rightsquigarrow ((A-\beta)u, [u]_{\partial D})$ と

$(u, \varphi) \rightsquigarrow (u, (Q-\beta)\varphi)$ を続けたものである。

ところが ∂D は compact だから $\varphi \rightsquigarrow (Q-\beta)\varphi$ は

$C^{2,\lambda}(\partial D) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\partial D)$ への写像として、isomorph.

従って、Lemma 1 と合せれば、2つの写像は共に isomorph。

また、$u \rightsquigarrow (Su, 0)$　$u \rightsquigarrow (0, \mu\frac{\partial u}{\partial n})$　$u \rightsquigarrow (0, Tu)$

$u \rightsquigarrow (\beta u, 0)$　$u \rightsquigarrow (0, \beta[u]_{\partial D})$ はいずれも

$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$ への compact operator

だから Lemma 3 により

$u \rightsquigarrow (Wu, Qu + \mu\frac{\partial u}{\partial n} + Tu)$ は index 0 をもつ

更に $(f, \varphi) \rightsquigarrow (f, \varphi - \delta[f]_{\partial D})$ は $C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$

上の isomorph だから、最後の2つの写像を続ければ

$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は index 0 をもつことがわかる。

2°. "index 0" をもつことは1°よりわかる.

従って、1:1を示せば十分.

ところが L; w-transversal だから Prop. 6 より明らか。

3°は Prop. 7 から容易にわかる。

Theorem 4 により.

$\beta > 0$,　$f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} (W - \beta) u = -f \\ \qquad Lu = 0 \end{cases}$$
は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ.

それを $u = G_\alpha f$ と表わせば,

G^L_α は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator.

を定義することは, Theorem 2 と同様にして, わかる。

Theorem 5

A, S は Th.4 と同じもの

L は "(L.2) をみたす"

$\forall x' \in \partial D$ に対し　$\mu(x') + t(x', D) + |T1(x')| \neq 0$

$\Longrightarrow$

$\forall \beta > 0$ に対し　$C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{1,\lambda}(\partial D)$

$$u \longmapsto \left((W-\beta)u,\ \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + Tu\right)$$

は isomorph である.

証明は Th.4 と全く同じ方法で，Lemma.2, Lemma 3 を用いれば容易にいえる

Cor of Th.5

$$\begin{cases} (W-\beta)u = -f \\ \quad Lu = -\varphi \end{cases} \qquad f \in C^{1,\lambda}(\bar{D}),\ \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial D)$$

は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ

$\because$　$T' \equiv T - \beta\delta I$ も singular operator on ∂D

Th.5 において，T の代りに T' を適用すれば，

$$\begin{cases} (W-\beta)u = -f \\ \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + T'u = -\varphi - \beta\delta[f]_{\partial D} \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に

unique solution をもつ　これは同時に，問題の解である。

従って，L が"(L.2) をみたす" 場合にも，sub-Markov resolvent G_α^L は対応する。

次に G_α^L に $C(\overline{D})$ 上の continuous semi-group が果して対応するか？が問題になるが，そのためには，Hille-吉田の理論により，$G_\alpha^L(C(\overline{D}))$ が $C(\overline{D})$ の中で dense であることが必要十分である．

この問題に対しては，佐藤-上野の結果がそのまゝ成立つ。

Theorem 6

L が (L.1) 又は (L.2) をみたし，更に transversal ならば，$G_\alpha^L(C(\overline{D}))$ は $C(\overline{D})$ の中で dense である。

従って，G_α^L には，$C(\overline{D})$ 上の conti. semigroup が対応する。

Th. 6 は，G_α^L の range が $C(\overline{D})$ の中で dense であるためには，transveral であることが十分であることを云っているのだが，この証明は，佐藤-上野の方法が全くそのまゝ，成立つので，省略する．

これで，一応 semigroup の存在するための条件を，L により条件づけられたが (L 1)，(L 2) の中で，T の regularity の条件が具体的でない。それは S についても同様であるが，

従って、S_xは T の regularity に関する条件を具体化する必要がある。

§4. Singular operator の regularity について.

A は $\overline{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order だから、$\overline{D}$ には、Riemann metric が入る。

$\overline{xy}$ は、その意味での geodesic distance

Lemma 4 [$\Theta_x u$ の性質]

(1) $\exists C>0 \quad \forall u\in C^2(\overline{D}) \quad |u(y)-\Theta_x u(y)| \leqq C\|u\|_2\, \overline{xy}^2$

(2) $\exists C>0 \quad \forall u \in C^2(\overline{D}) \quad |\Theta_x u(y) - \Theta_{x'}u(y)| \leqq C\|u\|_2\, \overline{xx'}$

ここに、$\|\ \|_2$ は $C^2(\overline{D})$ の norm.

これは $D\subset R^N$ の場合に示して、あとは、適当に修正すればよい。Dが有界領域の場合は直接計算すれば容易に示される。

Theorem 7

$\alpha>0$, $0<\mu<1$, $\overset{M}{\cancel{\alpha}}$: real $C>0$ が存在して

(a) $$\int_{B(x,r)} S(x,dy)\,\overline{xy}^2 \leqq C r^\alpha$$

(b) $$\int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]} |S(x,dy)-S(x',dy)| \leqq C\,\overline{xx'}^{\mu}\,\frac{1}{\rho^{\cancel{\alpha}M}}$$

$\Longrightarrow \quad \exists\, 0<\lambda<1$

$u \rightsquigarrow \int S(x,dy)[u(y)-\Theta_x u(y)]$ は $C^2(\overline{D}) \to C^{0,\lambda}(\overline{D})$; conti.

(Proof)

$0 < {}^{\exists}\lambda < 1$　$\overline{xx'}$ が十分小さいところで，

$\left| \int S(x,dy)[u(y) - \theta_x u(y)] - \int S(x',dy)[u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$

$\leqq C \|u\|_2 \overline{xx'}^{\lambda}$ であることを示せば十分。

$\overline{xx'} = \varepsilon < 1,\ 0 < \delta < 1.$

$$I_1 = \left| \int_{B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta)} S(x,dy)\,[u(y) - \theta_x u(y)] \right|$$

$$I_2 = \left| \int_{B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta)} S(x',dy)\,[u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

$$I_3 = \left| \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta)]} S(x,dy)[u(y) - \theta_x u(y)] - S(x',dy)[u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

とおくと

$$\left| \int S(x,dy)[u(y) - \theta_x u(y)] - \int S(x',dy)[u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

$\leqq I_1 + I_2 + I_3$

$B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta) \subset B(x,2\varepsilon^\delta),\ B(x',2\varepsilon^\delta)$ に注意して

Lemma 4 (1) と (a) を用いて

$$I_1 \leqq C_1 \|u\|_2 \int_{B(x,2\varepsilon^\delta)} S(x,dy)\,\overline{xy}^2 \leqq C_2 \|u\|_2\, \varepsilon^{\alpha\delta}$$

$I_2 \leqq C_2 \|u\|_2\, \varepsilon^{\alpha\delta}$ も同様である

$$I_3 \leqq \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta)]} |S(x,dy) - S(x',dy)|\, u(y) + \int_{\{\ ''\ \}} S(x,dy)\,|\theta_x u(y) - \theta_{x'} u(y)|$$

$$+ \int_{\{\ ''\ \}} |S(x',dy) - S(x,dy)|\, |\theta_{x'} u(y)|$$

第1項 $\leqq C_4\,\overline{xx'}^{\mu}\,\dfrac{1}{\varepsilon^{\delta N}}\,\|u\|_2 = C_4\,\varepsilon^{\mu-\delta N}\,\|u\|_2$ （∵ 仮定 (b) ）

第2項 $\leqq C_5\,\|u\|_2\,\overline{xx'}\displaystyle\int_{CB(x.\varepsilon^{\delta})} S(x.dy) \leqq C_6\,\|u\|_2\,\varepsilon^{1-2\delta}$

∵ Lemma 4 (2) と

$$\int_{C[B(x.\varepsilon^{\delta})]} S(x.dy) \leq C\,\varepsilon^{-2\delta}$$ に注意すればよい.

これは $\displaystyle\int S(x.dy)\,\overline{xy}^2 \leq {}^{\exists}C$ （ $S(x.dy)$ の定義!! ）より出る

第3項 $\leqq C_7\,\|u\|_2\,\varepsilon^{\mu-\delta N}$ は 第1項と同じ.

$$\therefore\quad I_3 \leqq C_8\,\|u\|_2\,(\varepsilon^{\mu-\delta M} + \varepsilon^{1-2\delta})$$

故に $\quad I_1 + I_2 + I_3 \leqq C_9\,\|u\|_2\,(\varepsilon^{\alpha\delta} + \varepsilon^{\mu-\delta M} + \varepsilon^{1-2\delta})$

$0 < \mu - \delta N < 1$ なるように δ を定め．更に $\alpha\delta < 1$ なるようにも出来る．$\lambda = \inf(\alpha\delta, \mu-\delta M, 1-2\delta)$ とおけば

$$I_1 + I_2 + I_3 \leqq C_{10}\,\|u\|_2\,\varepsilon^{\lambda}$$ となる。

Cor of Th.7

$$Su = cu + \frac{\partial u}{\partial X} + \int S(x.dy)[u(y) - \theta_x u(y)]$$

c, X がともに class $C^{0,\lambda}$ とすると.

$$C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$$

$$u \longmapsto Su$$ は continuous である。

さらに．Th.7の条件をみたすSは，具体的にはどんな形のものがあるかを．次のTh で述べる。

Theorem. 8

$m(dy)$; A により induce された Riemann volume element

(1°) $K(x, y) \leqq C \quad \forall x.$ almost all y

(2°) $|K(x,y) - K(x',y)| \leqq C\, \overline{xx'}^{\mu} \quad \forall x, \forall x'$ almost all y

その時 $S(x. dy) = \dfrac{K(x. y)}{\overline{xy}^{n+2-\alpha}} m(dy)$ は Th. 7 の仮定をみたす。

(Proof)

(a) $\tilde{m}(\partial B(x.r))$ を 球面 $\partial B(x.r)$ の面積とすると 空間 $\overline{D}$ は compact だから $^{\exists}K_1\, r^{N-1} \leqq \tilde{m}(\partial B(x.r)) \leqq {}^{\exists}K_2\, r^{N-1}$

$$\int_{B(x.r)} S(x. dy)\, \overline{xy}^2 \leqq C \cdot \int_{B(x.r)} \frac{m(dy)}{\overline{xy}^{N-\alpha}} \leqq C' \int_0^r \frac{1}{t^{N-\alpha}} \cdot t^{N-1} dt$$

$$\leqq C' \int_0^r t^{-(1+\alpha)} dt = C'' r^{\alpha}$$

(b) $N+2-\alpha > 0$ としてよい.

$$\int_{C[B(x.\rho) \cup B(x', \rho)]} |S(x. dy) - S(x', dy)|$$

$$= \int_{C[B(x.\rho) \cup B(x', \rho)]} \left| \frac{K(x. y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x', y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| dm(y)$$

$$\left| \frac{K(x. y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x', y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| \leqq \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} |K(x. y) - K(x', y)|$$

$$+ |K(x', y)| \left| \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right|$$

第1項 $\leqq C \dfrac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^{\mu} \leqq C \dfrac{1}{\rho^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^{\mu}$

$N+2-\alpha = k\nu \quad 0 < \nu < 1$ なるよう自然数 k を選ぶ.

$$\left| \frac{1}{\overline{xy}^{k\nu}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{k\nu}} \right| = |\overline{x'y}^{\nu} - \overline{xy}^{\nu}| \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geqq 1}} \frac{1}{\overline{xy}^{i\nu}\, \overline{x'y}^{j\nu}}$$

$$\leqq k\,|\overline{x'y}^{\nu}-\overline{xy}^{\nu}|\,\frac{1}{(\overline{xy}\wedge\overline{x'y})^{(k+1)\nu}}$$

$$\leqq k\,\overline{xx'}^{\nu}\,\frac{1}{(\overline{xy}\wedge\overline{x'y})^{N+2-\alpha+\nu}} \quad \left(\because\ 0<\nu<1 \text{ なので } |\overline{x'y}^{\nu}-\overline{xy}^{\nu}|\leqq\overline{xx'}^{\nu}\right)$$

$$\leqq k\,\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha+\nu}}\,\overline{xx'}^{\nu}$$

$$\therefore \int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]} |S(x',dy)-S(x',dy)| \leqq C'\left(\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha}}+\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha+\nu}}\right)\overline{xx'}^{\nu\vee\mu}$$

ρ, $\overline{xx'}<1$ としてよいから $M=N+2-\alpha+\nu$, $\tilde{\mu}=\nu\vee\mu$ とおけば、 $\quad$ 〃 $\leqq C''\dfrac{1}{\rho^{M}}\overline{xx'}^{\tilde{\mu}}$。

境界上の singular operator T についても、同じ型の結果を得る。

$\widetilde{x'y'}$ を local には $\sum|x^i(y)-x^i(x')|^2+x^N(y)$ と equivalent な量として定義する。

i.e $\forall(U,\chi)$ $U\cap\partial D\neq\phi$, $U\supset{}^{\forall}K$: compact に対し ${}^{\exists}K_1, K_2>0$ $\quad K_1\widetilde{x'y}\leqq\sum_{i=1}^{N-1}|\chi^i(y)-\chi^i(x)|^2+\chi^N(y)\leqq K_2\widetilde{x'y}$
for $\forall x'\in K$, $\forall y'\in K$

Theorem 9

(a) $\forall x'\in\partial D$ $\displaystyle\int_{B(x',r)} t(x',dy)\,\widetilde{x'y}\leqq Cr^{\alpha}$

(b) $\forall x', \forall x''$ $\displaystyle\int_{C[B(x',\rho)\cup B(x'',\rho)]}|t(x',dy)-t(x'',dy)|\leqq C\,\overline{x'x''}^{\mu}\frac{1}{\rho^{M}}$

${}^{\exists}\alpha>0$ $\quad 0<{}^{\exists}\mu<1$ $\quad M$: real $\quad C>0$

$\Longrightarrow$ $0<{}^{\exists}\lambda<1$, $\quad u\rightsquigarrow\displaystyle\int_{\bar D}t(x',dy)[u(y)-\theta_x^{*}u(y)]$ は $C^2(\bar D)$ から $C^{0,\lambda}(\partial D)$ への cont. operator である。

更に $|K(x', y)| \le C$ $\qquad \forall x.\ a.a\ y$

$|K(x', y) - K(x'', y)| \le C\,\overline{x'x''}^{\mu}$ $\qquad \forall x', \forall x'',\ a.a.\ y$

ならば、$t(x', dy) = \dfrac{K(x', y)}{\overline{xy}^{n-\alpha}\ \widehat{x'y}}\, m(dy)$ は、この定理の仮定をみたす。

これらの証明は Th. 8 に同じである。

Remark 1

Wentzell の境界条件 L が (L.2) をみたす場合 T は $C^2(\bar{D})$ から $C^{2,\lambda}(\partial D)$ への conti. op. であることを必要とするが、この条件に対する Th. 9 の形での条件は、未解決である。

Remark. 2

A 及び Q が uniformly elliptic であることは、微分方程式の結果に帰着させるために必要だったが、degenerate した elliptic op. については、この種の境界問題はどうなるか。

文献

[1] Brelot-Choquet-Deny のセミナーノート. 1965/1966

[2] Courrege ; Bourbaki のセミナーノート 1965/1966, n°302

[3]. Sato-Ueno ; J. Math. Kyoto. 4-3 (1965)