数理解析研究所講究録
57巻 1968年 24-33

対称な Brownian resolvent に関する注意

阪大理 渡辺毅

従来，Markov 過程の resolvent $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ は，有界可測関数の族 $\mathcal{B}$ あるいは有界連続関数の族 $\mathcal{C}$ の上の作用素として捉えられ，2 (p) 乗積分可能な関数の族 L^2 (L^p) 上の作用素と考えて議論されることは少なかった。しかし具体的に与えられた微分（あるいは微積分）作用素を生成作用素にもつような resolvent の構成やその性質を論じる際に，G_α に対する L^2-theory の有効性が，最近福島氏などの研究によって明らかにされつつある（[3]，[4]，[1]）。これは一口に言うと，楕円型偏微分方程式における関数解析的方法を，「必要な modification」の下で確率論に結びつけるものである。ここでは，L^p-theory が有効であるような 1 つの例を示す。

1. 定理

E は n 次元ユークリッド空間 R^n の領域である。
Δ はラプラシアン, $A=\frac{1}{2}\Delta$ とする。

$\{G_\alpha(x,dy),\ \alpha>0\}$ がつぎの条件を満足するとき **resolvent** であるという。

(i) E の各点 x に対し, $G_\alpha(x,\cdot)$ は E 上のボレル測度で, $\alpha G_\alpha(x,E)\leqq 1$ をみたす。

(ii) E の各ボレル集合 B に対し, $G_\alpha(\cdot,B)$ は E 上のボレル可測関数である。

(iii) レゾルベント方程式をみたす:

$$G_\alpha(x,B)-G_\beta(x,B)+(\alpha-\beta)\int_E G_\alpha(x,dy)\,G_\beta(y,B) = 0.$$

E 上の関数で無限回連続微分可能な関数 (C^∞-関数) の全体を $\mathcal{C}^\infty$, その中でコンパクトな台の関数全体を $\mathcal{C}_0^\infty$ で表わす。

任意の $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ に対し, $u=G_\alpha f=\int_E G_\alpha(\cdot,dy)f(y)$ が, 方程式

(1) $\qquad (\alpha-A)u=f$

の解であるとき，$\{G_\alpha(x,dy),\ \alpha>0\}$ を Brownian resolvent と呼ぶ。

E上の測度 μ が $\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$ に関して excessive であるとしよう；$\mu(B)\geqq\alpha\,\mu G_\alpha(B)=\alpha\int_E\mu(dx)G_\alpha(x,B)$. μ に関して p 乗積分可能な関数の全体を $L^p(\mu)$ で表わす．この時，$f\longrightarrow G_\alpha f$ は $L^p(\mu)$ からそれ自身への作用素で，$\|\alpha G_\alpha\|_{L^p,\mu}\leqq 1$ をみたす．

実際，Hölder の不等式によって

$$
\begin{aligned}
|\alpha G_\alpha f| &\leqq (\alpha G_\alpha|f|^p)^{\frac{1}{p}}(\alpha G_\alpha 1)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqq (\alpha G_\alpha|f|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\|\alpha G_\alpha f\|^p_{L^p,\mu} &= \int_E|\alpha G_\alpha f|^p d\mu\\
&\leqq \int_E \alpha G_\alpha|f|^p(x)\,d\mu(x)=\int_E|f|^p(y)\,\mu\alpha G_\alpha(dy)\\
&\leqq \int_E|f|^p(y)\,\mu(dy)=\|f\|^p_{L^p,\mu}.
\end{aligned}
$$

μ に関する内積 $\int_E f\,g\,d\mu$ を $(f,g)_\mu$ で表わす．任意の可測な正の関数 f,g に対し

$$
(2)\qquad (G_\alpha f,\ g)_\mu=(f,\ G_\alpha g)_\mu
$$

をみたすとき，$\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$ を <u>μ-symmetric</u> な resolvent であるという。このとき，μ は $\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$ に関して excessive である．実際，$f\geqq 0$ に対し

$$\int_E f(y)\,\alpha\mu G_\alpha(dy)=\int_E \alpha G_\alpha f(x)\,\mu(dx)$$
$$=(\alpha G_\alpha f,\ 1)_\mu$$
$$=(f,\ \alpha G_\alpha 1)_\mu$$
$$\leqq (f,\ 1)_\mu=\int_E f(y)\,\mu(dy).$$

<u>定理 1.</u> $\{G_\alpha(x,dy),\ \alpha>0\}$ を Brownian resolvent, $\mathcal{B}$ を E上の有界可測関数の全体，$\mathcal{C}^1$ を連続な偏導関数をもつE上の関数全体とする。この時，任意の $f\in\mathcal{B}$ に対し $G_\alpha f\in\mathcal{C}^1\cap\mathcal{B}$ である．

(μ は空でないすべての開集合に対し正の値を取る測度とする.)

<u>定理 2.</u> $\{G_\alpha(x,dy),\ \alpha>0\}$ を μ-symmetric な Brownian resolvent とする。この時，つぎのような関数の系 $\{g_\alpha(x,y),\ \alpha>0\}$ が唯1つ存在する．

(i) $\qquad G_\alpha(x,dy)=g_\alpha(x,y)\,\mu(dy)$

(ii) $g_\alpha(x,y)$ は $x,\ y$ に関して対称で，2変数 (x,y) の関数として可測，かつ一方を固定したとき残りの変数に関して下に半連続である．

(iii) yを固定したとき，$g_\alpha(x,y)$はxの関数として，$\{G_\alpha, \alpha>0\}$に関してα-excessiveである：

$$\beta G_{\alpha+\beta}\, g_\alpha(x,y) \uparrow g_\alpha(x,y), \quad \beta\to\infty.$$

定理1は方程式(1)に対するL^p-theoryの結果から容易に導びかれる．定理2は定理1と［2，p496，Theorem 1］から証明される．これらの性質は，E上のルベック測度に関して対称なBrownian resolventのより深い解析のために必要な基本的性質である．

2. 証明

つぎの記号を用いる．

$L^p = \{f;\ f$はE上の関数で$\int_E |f|^p dx < \infty\}$，

$L^p_{loc} = \{f;$ 任意の$a\in C_0^\infty$に対し，$af\in L^p\}$，

$k=(k_1,\cdots,k_n)$，$|k| = k_1+\cdots+k_n$で

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\cdots\partial x_n^{k_n}} f, \quad \left(\begin{matrix}\text{微分は超関数}\\ \text{の意味に取る}\end{matrix}\right)$$

$\mathcal{E}^m_{L^p} = \{f;\ D^k f\in L^p,\ |k|\leqq m\}$，

$$\|f\|_{p,m} = \sum_{|k|\leqq m} \|D^k f\|_{L^p},$$

$\mathcal{E}^m_{L^p(loc)} = \{f;$ 任意の$a\in C_0^\infty$に対し，$af\in\mathcal{E}^m_{L^p}\}$.

方程式(1)を超関数の意味で考えたものを

$$(3) \qquad (\alpha - A)u = f \quad \text{in } (\mathcal{D}')$$

と表わす．方程式(3)については，つぎの結果が知られている．

<u>補題1.</u> uが(3)の解で，かつ $u \in L^p_{loc}$ であるとする．その時，$f \longrightarrow u$ は $\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ から $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ への連続な対応を与える．厳密に言うと，$\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ の関数列 f_j に対し L^p_{loc} に属する解 u_j が与えられているとする．その時，$u_j \in \mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ であり，さらに任意の $a \in \mathcal{C}^\infty_0$ に対し af_j が $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の中で 0 に収束すれば，au_j は $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p}$ の中で 0 に収束する．

つぎの結果は L^p に対する Sobolev の補題である．

<u>補題2.</u> $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の定義で，特に $E = R^n$ としたものを $\mathcal{E}^m_{L^p}(R^n)$ で表わす．R^n 上の関数で，すべての $|k| \leqq m$ に対し $D^k f$ が有界連続であるものの全体を $\mathcal{C}^m_b(R^n)$，そこでのノルムを $|f|_m = \sum_{|k| \leqq m} \sup |D^k f|$ とする．その時，

$$(4) \qquad \mathcal{E}^{[\frac{n}{p}]+1+l}_{L^p}(R^n) \subset \mathcal{C}^l_b(R^n).$$

厳密に言うと，(4)の左辺に属する任意の f に対し，

それと殆んどいたる所で一致する関数 $\tilde{f}$ が存在して

$$|\tilde{f}|_\ell \leqq C\times\|f\|_{p,[\frac{n}{p}]+1+\ell}$$

である。

定理1の証明

$f\in\mathcal{B}$ ならば $u=G_\alpha f\in\mathcal{B}$ であるから、$L^p_{loc}=\mathcal{E}^0_{L^p(loc)}$ に属する。さらに $G_\alpha f$ は(3)の解である。実際 $u=G_\alpha f$ が(3)の解であるような $f\in\mathcal{B}$ の全体は単調族をなし、特に $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ ならば仮定によって $u=G_\alpha f$ は(3)をみたすからである。したがって補題1により、$G_\alpha f\in\mathcal{E}^2_{L^p(loc)}$ である。

$p>n$ なる p を取ると、$[\frac{n}{p}]=0$ だから補題2により $\mathcal{E}^2_{L^p}(R^n)\subset\mathcal{C}^1_b(R^n)$。したがって、任意の $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ にたいし、$a\cdot G_\alpha f$ と a.e. で一致する連続関数が存在する。$a\in\mathcal{C}_0^\infty$ は任意だから、$G_\alpha f$ と a.e. で一致する連続関数が存在する。これを $\widetilde{G_\alpha f}$ で表わす。

$0\leqq f_j\in\mathcal{B}$ が各点で 0 に減少するとしよう。任意の $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ に対し af_j は $L^p=\mathcal{E}^0_{L^p}$ の中で 0 に収束するから、補題1により $aG_\alpha f_j\longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}^2_{L^p}$ である。したがって補題2により $a\widetilde{G_\alpha f_j}\longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^1_b(R^n)$ である。特に E の各点 x に対し

$$\widetilde{G_\alpha f_j}(x) \longrightarrow 0, \qquad j\to\infty.$$

xを固定したとき，$\widetilde{G_\alpha f}(x)$ は $\mathcal{B}$ 上の正の汎関数だから，

$$\widetilde{G_\alpha f}(x) = \int_E f(y)\,\widetilde{G}_\alpha(x,dy), \qquad f\in\mathcal{B}$$

をみたす測度 $\widetilde{G}_\alpha(x,dy)$ が唯1つ存在する．特に $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ のときは $G_\alpha f$ 自身が連続だから，Eのすべての点xで $G_\alpha f(x)=\widetilde{G_\alpha f}(x)$．故に $G_\alpha(x,dy)=\widetilde{G}_\alpha(x,dy)$ である．これで，任意の $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ に対し，$a\,G_\alpha f\in\mathcal{C}_b^1(R^n)$ であること，すなわち $G_\alpha f\in\mathcal{B}\cap\mathcal{C}^1$ が示された．

定理2の証明

[2]の用語と結果を用いる．条件(2)は $\{G_\alpha, \alpha>0\}$ がそれ自身の1つのco-resolventであることを示している．$1\geq f\geq 0$ が μ-a.e.で 0 であるとする．そのとき

$$(G_\alpha f, 1)_\mu = (f, G_\alpha 1)_\mu = 0$$

であるから，$G_\alpha f$ は μ-a.e.で 0 である．定理1により $G_\alpha f$ は連続だから，μ に関する仮定から $G_\alpha f$ は恒等的に 0 である．したがって，各 $x\in E$ に対し，測度 $G_\alpha(x,dy)$ は μ に関して絶対連続である．

故に [2; p496, Theorem 1] によって，定理2の

(i), (iii) および (iv) $G_\alpha(y, dx) = g_\alpha(x, y)\mu(dx)$,
(v) xを固定したとき，$g_\alpha(x, y)$ は yの関数としもα-excessiveである，という性質をもつ (x, y)-可測な核 $g_\alpha(x, y)$ が唯1つ存在する．(i), (iv) により，yを固定したとき，$f(x) = g_\alpha(x, y)$ と $g(x) = g_\alpha(y, x)$ は μ-a.e. でひとしく，(iii), (v) により共に α-excessive である．したがって

$$\beta G_{\alpha+\beta} f(x) = \beta \int_E f(y)\, g_{\alpha+\beta}(x, y)\, \mu(dy)$$

$$= \beta \int_E g(y)\, g_{\alpha+\beta}(x, y)\, \mu(dy) = \beta G_{\alpha+\beta} g(x).$$

$\beta \to \infty$ の時，左辺は $f(x)$ に右辺は $g(x)$ に増加するから，$f(x) = g(x)$ がすべての $x \in E$ で成り立つ．故に $g_\alpha(x, y)$ の対称性が証明された．

$\mathcal{B} \ni f$ ならば $G_\alpha f$ は連続であるから，任意の可測な非負関数 f に対し，$G_\alpha f$ は下に半連続である．したがって f がα-excessive なら，それは下半連続な関数列 $\alpha G_{\alpha+\beta} f$ の単調増加な極限であるから矢張り下に半連続である．これで定理2が証明された．

注意

定理1の証明からつぎのことも分る．f_β が 0に有

界收束するならば，$G_\alpha f_j$，$D^1 G_\alpha f_j$ はすべてのコンパクト集合の上で一様に 0 に近づく．

文献

[1] 国田寛；Banach 束における submarkov 半群について，本報告集

[2] H. Kunita and T. Watanabe, Markov processes and Martin boundaries, Part I, Illinois J. Math. 9 (1965), 485—526

[3] M. Fukushima, On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] T. Shiga and T. Watanabe, On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion, Osaka J. Math. 5 (1968), 1—31.