数理解析研究所講究録
59巻 1968年 238-248

定数係数線型偏微分方程式系のある種の代数的構造

東大 理院　斉藤 恭司

§1. はじめに

$\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$, はそれぞれ微分可能函数、正則函数、distribution, hyperfunction の芽(の層)とします。Ωを$\mathbb{R}^n$の開集合とした時、$\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, 等は多項式$P(X)$を偏微分$P(\frac{\partial}{\partial x})$と作用させる事により、$\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$-module となります。(同様に$\Omega$が$\mathbb{C}^n$の open set の時、$\mathcal{O}(\Omega)$は$\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$-module。)

そこで以下、これ等の moduleとしての構造と偏微分方程式の問題の関連を調べます。

§2. affine module

Aは単位元を持つ、可換結合律を満す環とします。以後A-加群と言う場合、常に1は identity として作用している場合のみを考えます。

<u>定義1.</u> A-加群Cが次の 1), 2) を満す時、A-affine加群と呼びます。

1) CはA-単射加群

2) 任意の ideal $I \subsetneqq A$ に対し、或る$u \in C$が存在し、

$u \neq 0$ かつ任意の $P \in I$ に対し $Pu = 0$ 。

定理2. Ω を $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) の開集合で凸とする時、$\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, (又は $\mathcal{O}(\Omega)$) は $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ (又は $\mathbb{C}[Z_1, \cdots, Z_n]$) -affine加群となる。

証. 今, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, ($\mathcal{O}(\Omega)$) 等を C, $\mathbb{C}[X_1, \cdots X_n]$ ($\mathbb{C}[Z_1, \cdots, Z_n]$) を A と置きます。

1) を満す事: I を A の任意の ideal、$\varphi : I \to C$ はある A-homomorphism とします。多項式環は noether 環だから、I の有限基底, $P_1, \cdots, P_k$ がとれます。$\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_k)$ とおいた行列に対し、$A^l \xrightarrow{\mathcal{Q}} A^k \xrightarrow{\mathcal{P}} A$ が完全列となる様な行列 $\mathcal{Q}$ を選べます。この時、Ehrenpreis [1] 又は Komatsu [2] 等により $C^l \xleftarrow{{}^t\mathcal{Q}} C^k \xleftarrow{{}^t\mathcal{P}} C$ は exact。1方、$(\varphi(P_1), \cdots, \varphi(P_k)) \in \ker {}^t\mathcal{Q}$. ($\because$ $Q_i \in A$ が $\sum_{i=1}^{k} Q_i P_i = 0$ なら $\sum_{i=1}^{k} Q_i \varphi(P_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{k} Q_i P_i) = 0$)。従って、或る $u \in C$ により、$(\varphi(P_1), \cdots, \varphi(P_k)) = {}^t\mathcal{P} u$。すなはち、$\varphi(P_i) = P_i u$。よって、写像 $\tilde{\varphi} : A \ni P \mapsto P u \in C$ は、φ の定義域を A まで拡張したものに成ります。

2) を満す事: I を A の任意の ideal とします。$I \neq A$ なら Hilbert の零点定理により、I は $\mathbb{C}^n$ 上少くとも一つは、共通零点を持ちます。今 $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) の座標を $(x_1, \cdots, x_n)$ (又は $(z_1, \cdots, z_n)$) とし、$u = \exp(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$ (又は $\exp(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i)$) :但し $a = (a_1, \cdots, a_n)$ は I の共通零点, と置くと、明かに $P(X) \in$

Iに対し、$P(\xi_x)u = P(a)u = 0$ q.e.d.

上の証明からも分る様に、定義1の条件2)は、或る意味で零点定理を意味します。

$\mathcal{O}(\Omega)$について1)が成立する事は[2]に直接解析的な証明が与へられています。以後の affine module についての一般的考察より、$\mathcal{E}(\Omega)$が affine である事を認めると自動的に、$\mathcal{O}(\Omega)$が affine と成る事が分ります。

系. 芽 $\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$ は affine module である。

($\because$ $\mathbb{R}^n$ 又は $\mathbb{C}^n$ において convex open set を基本近傍系とできる。)

Prop. 3. C は A-affine module とします。この時、A-加群 M に対し、$Hom_A(M, C)$ を対応させる functor は、exact かつ faithfull となる。

証. exact である事は、C が移入加群である事の直接の結果なので、faithfull になる事をたしかめます。

二つの A-加群 M, N の間の A-homomorphism λ に対応する $Hom_A(N, C)$ から $Hom_A(M, C)$ への準同型を λ^* とします。$\lambda \neq 0$ より $\lambda^* \neq 0$ を言います。

$\lambda \neq 0$ より、或る $m \in M$ が在って、$\lambda(m) = n \neq 0$。$A \cdot n \cong A/I$, I は A と異る ideal。条件2)により、I の共通零点なる $u \in C$ が存在する。$A \ni P$ に $Pu \in C$ を対応させる写像は、自動的に Rn から C への写像とみなせ、$\neq 0$ である。C は単射加

群だから、それはNからCへの写像に拡張される。すると $\lambda^*(\varphi)=\varphi\circ\lambda \neq 0$。よって $\lambda^* \neq 0$。　q.e.d.

以後、$Hom_A(M,C)$の事をC_Mと書き、$\lambda\in Hom_A(M\,N)$に対応する$Hom_A(C_N, C_M)$の元をλ^*と書く事にします。

注意 M,NをLのsubmoduleとする時

$$0\longrightarrow L/_{M\cap N}\longrightarrow L/_M\oplus L/_N\longrightarrow L/_{M+N}\longrightarrow 0$$

がexactだから任意のΩに対し

$$0\longrightarrow\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_{M+N}})\longrightarrow\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_M})\oplus\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{N})$$
$$\longrightarrow\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_{M\cap N}})\longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{F}_{L/_{M+N}})\longrightarrow\cdots$$

がexactな事が分り、例へば、$H^1(\Omega,\mathcal{F}_{L/_{M+N}})=0$ (ie. ΩがL/M+N-convex) ならば、$\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_{M\cap N}})$の元は、$\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_M})$の元と、$\Gamma(\Omega,\mathcal{F}_{L/_N})$の元の和で書ける。([3]参照)

さて、$M\ni m$, $C_M\ni u$の組に対し$u(m)\in C$を対応させる写像を、内積の記号$\langle m,u\rangle_A$で表します。もち論$\langle\cdot,\cdot\rangle_A$はA-bilinearです。

Lemma 4.

$\langle\cdot,\cdot\rangle_A : M\times C_M\longrightarrow C$ はnon-degenerate.

証 mが0でないとすると、Prop 3.の証明中示した様に、或るMからCへのhom. φで、$\varphi(m)\neq 0$なものが存在する。

逆に、$\varphi \in C_M$ が $\langle m, \varphi \rangle = 0$, $\forall m \in M$ ならば、φ は写像として零だから $\varphi = 0$ q.e.d.

§3. A-algebra

B は A-algebra とします。この時乗法により、B は $Hom_A(B, B)$ の A-sub-module とみなせます。従って C を A-module とする時、A-bilinear

$$Hom_A(B,B) \times Hom_A(B,C) \to Hom_A(B,C)$$

を B に制限する事により、canonical に $Hom_A(B,C)$ は B-module とみなせます。

<u>補題5</u>. A, B, C, を上の通りとし、M を B-module とします。

$$Hom_B(M, Hom_A(B,C)) \cong Hom_A(M, C)$$

証　$M = B$ ならば正しいので、inductive limit をとって、1般に M が B-free module なら正しい。任意の M は $Coker(B^I \to B^J)$ と表示できますが、Hom_A は左 exact functor なので、上の等式が成立する。 q.e.d.

<u>定義6</u>. $\psi: A \to B$ は ring homomorphism。この時 B-module M から、A-module N への単に加群としての準同型 $\varphi: M \to N$ が、ψ-準同型であるとは、

$$a\,\varphi(m) = \varphi(\psi(a)m) \quad \forall a \in A,\ \forall m \in M$$

となる事とします。更に ψ も φ も同型である時、φ を ψ-同型、又は作用同型であると言います。

Prop. 7. CがA-affine加群の時、$C_B = Hom_A(B, C)$ はB-加群として次の性質を持つ。

i) C_B は B-affine 加群

ii) $i: A \to B$ を canonical な homomorphism

$i^*: C_B \to C_A = C$ を.その dual とする時、i^*はi-準同型となる。

iii) $i^*(a \cdot u) = \langle a, u \rangle_A \quad {}^\forall a \in B,\ u \in C_B$

iv) $\langle a \cdot b, u \rangle_A = \langle a, b \cdot u \rangle_A \quad {}^\forall a, b \in B,\ u \in C_B$

更に、iv)を満す様な bilinear $B \times C_B \to C_B$ は唯一通りしかない。

証. 定義より、iv)を満す事は明か。又iv)に於て、b, uを固定し、aを動かせば、§1. Lemma 4. により、$b \cdot u$ は唯一通りに決まる。iv)を満す様な作用は、自動的にi)〜iii) を満す事を示します。

i) 1) $0 \to M \to N$ がB-module として exact なら、A-module として exact であり、$C_N \to C_M \to 0$ も exact. 1方 補題5より $C_N \cong (C_B)_N$, $C_M \cong (C_B)_M$ だから $(C_B)_N \to (C_B)_M \to 0$ も exact.

2) $M \neq 0$ なら $(C_B)_M \cong C_M \neq 0$

ii) $a, b \in A$, $u \in C_B$ に対し、

$\langle b, i^*(i(a)u) \rangle_A = \langle ib, i(a)u \rangle_A = \langle i(ab), u \rangle_A = \langle ab, i^*u \rangle_A$
$= \langle b, a\, i^*u \rangle_A$ 。任意のbについて等しいから Lemma4. より

$$i^*(i(a)u) = a\, i^*u \qquad {}^\forall a \in A,\ u \in C_B$$

(ii) も同様な計算を行へばよく、省略します。 q.e.d.

例 1. $A=\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n]$ の $\{\frac{1}{2}(X_j+\sqrt{-1}\,Y_j) : j=1,\cdots,n\}$ で生成される ideal を I とし、$B=A/I$ とおく。この時、$B\cong\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$, $Z_j=\frac{1}{2}(X_j-\sqrt{-1}\,Y_j)$ 。

この時、$\mathcal{E}_B\cong\mathcal{D}'_B\cong\mathcal{B}_B\cong\mathcal{O}$ となる。

従って、$\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$-module M に対し、

$$\mathcal{O}_M\cong\mathcal{E}_M\cong\mathcal{D}'_M\cong\mathcal{B}_M 。$$

同様に convex open set Ω に対し

$$\mathcal{O}(\Omega)_M\cong\mathcal{E}(\Omega)_M\cong\mathcal{D}'(\Omega)_M\cong\mathcal{B}(\Omega)_M$$

2. 1般に A-module M に対し、$I=ann(M)$, $B=A/I$ と置くと、$(C_B)_M\cong C_M$

注意 1. M を B-module とする時、次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} M\times(C_B)_M & \xrightarrow[\langle\,,\,\rangle_B]{} & C_B \\ \wr\Vert & & \downarrow i^* \\ M\times C_M & \xrightarrow[\langle\,,\,\rangle_A]{} & C_A \end{array}$$

2. M を B-module とする時、$(C_B)_M$ に C_M を対応させる functor に対し、N を A-module とする時 C_N に対し、$(C_B)_{M\otimes_A B}$ を対応させる functor は、その adjoint functor になる。

§4. Cohomology 群

<u>Prop. 8.</u> Ω を1般に convex とは限らない $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$\mathcal{F}=\mathcal{E}$ 又は $\mathcal{D}'$ 又は $\mathcal{B}$ とします。$A=\mathbb{C}[X_1,\cdots X_n]$。

この時、任意 finite module Mに対し、

$$H^{k}(\Omega, \mathcal{F}_M) \cong \mathrm{Ext}_A^{k}(M, \mathcal{F}(\Omega)) \quad 。$$

証、

まず、$\mathrm{Hom}_A(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \ni \varphi$ に対し、$(\varphi((1,0\cdots 0)), \cdots, \varphi((0,\cdots 0,1)))$ $\in \Gamma(\Omega\, \mathcal{F})^m \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}^m)$ を対応させる事により、functoriel に $\mathrm{Hom}(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^m})$。

与へられたMを free resolution して、

$$0 \leftarrow M \leftarrow A^{m_0} \xleftarrow{p_0} A^{m_1} \xleftarrow{p_1} A^{m_2} \longleftarrow$$

すると対応して

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(A^{m_0}, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(A^{m_1}, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ 0 \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_M) & \rightarrow & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_0}}) & \rightarrow & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_1}}) & \rightarrow & \end{array}$$

左exact だから、初項は等しくなり、又、chain complexの cohomology 群 も同型になる。 q.e.d.

§5. $\mathcal{E}(\Omega_1)$ と $\mathcal{E}(\Omega_2)$ が作用同型になる為の条件

§4. の事は、 領域Ω 全体での微分方程式の大域的な問題は、$\mathcal{F}(\Omega)$のA-module としての構造だけによって決定される事を意味しています。

そこで、最後に、二つのdomain Ω_1, Ω_2, が与へられた時に、ring hom $\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ 及び、differentiable map $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ により、${}^a\varphi : \mathcal{E}(\Omega_2) \ni f \longmapsto f\circ\varphi \in \mathcal{E}(\Omega_1)$

が φ-同型になる為の、必要充分条件を求めます。

Prop. 9. 記号は上記の通りとします。

$${}^a\varphi : \mathcal{E}(\Omega_2) \cong \mathcal{E}(\Omega_1) \quad \text{作用同型}$$

$\Longleftrightarrow$ φが1次変換

すなはち、Aを $\det A \neq 0$ なる実係数行列、$x = (x_1, \cdots, x_n)$ はΩ_1の座票系、$b = (b_1, \cdots, b_n)$ を実ベクトルとして

$$\varphi(x) = Ax + b$$

証、まず、次の Lemma から始めます。

Lemma 10. $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n] \ni P$ について

$$(*) \quad P(f \cdot g) = (Pf)g + f(Pg) \qquad {}^\forall f, g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$$

$\Longleftrightarrow$ Pは 斉一次式

証、充分である事は明かです。

必要なる事。まず$(*)$ に於て $f = g = 1$ とおけば、$P1 = 0$。従って、Pは定数項を含まない。1次式の部分は差引いても$(*)$に変りはないから、Pは2次以上の項ばかりから成るとしてかまわない。nについて帰納法で示します。$n = 0$なら問題ありません。

$n \geq 1$とし、$P = QX_1 + R$ 但し、RはX_1を含まぬ多項式、と表示します。Rは $\mathbb{C}[x_2, \cdots, x_n]$ 上 $(*)$ を満足するので帰納法の仮定より$= 0$。そこで再度 $P = (Q'X_1 + R')X_1^{\ell}$、但$R'$は$X_1$を含まぬ多項式とします。 $R' \neq 0$ なので

$x_2,\cdots,x_n$ の多項式 π で、$R'\pi \neq 0$ なるものが存在します。
この時、(*)に於て、$f=x_1$, $g=x_1^{\ell-1}\pi$ と置き両辺比較すると、

$$0 \neq \ell!(R'\pi) = x_1 P(\pi x_1^{\ell-1}) + \pi x_1^{\ell-1} P x_1$$

しかるに右辺第一項は $\pi x_1^{\ell-1}$ が x_1 に関し次数 ℓ より少だから $=0$。第二項は、P が2次以上の項より成るから $=0$。
矛盾。∴ $P=0$　　　　q.e.d.

注意　上記の Lemma は、その証明から分る様に、任意の体係数の多項式環に於て、正しい。

Prop. の証明.

まず、$\Psi: \mathcal{E}(\Omega_2)\to\mathcal{E}(\Omega_1)$ が作用同型になるとは、φ が $\Omega_1\to\Omega_2$ の diffeomorphism を与へ（∵領域 Ω 及び、その differentiable map の Category は、$\mathcal{E}(\Omega)$ の $\mathbb{C}$-homomorphism の Category と等しい）かつ

(**)　$P(u\circ\varphi) = (\Psi(P)\cdot u)\varphi$　　$\forall u\in\mathcal{E}(\Omega_2)$, $\forall P\in A_1 = \mathbb{C}[x_1\cdots x_n]$

となる事です。

(**) に於て、$P=\alpha\in\mathbb{C}$ とすると $\Psi(\alpha)\cdot u=\alpha u$　$\forall u$
だから $\Psi(\alpha)=\alpha$。

次に P が1次式とすると (**) を用いて

$$P(u\cdot v\circ\varphi) = (u\Psi(P)v + v(\Psi(P)u))\circ\varphi \quad \forall u,v\in\mathcal{E}(\Omega_2)$$

だから　$\Psi(P)u\cdot v = u(\Psi(P)v) + v\Psi P(u)$　$\forall u,v\in\mathcal{E}(\Omega)$

従って lemma より $\Psi(P)$ も1次式。

$\psi(X_i)=\sum_j a_{ij} X_j'$, $A=(a_{ij})$ と置く。1方 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ と分解しておく。(但 $\varphi_j = x_j' \circ \varphi$)

(**)より. $X_i \cdot \varphi_j = (\psi(X_i) \cdot x_j') \circ \varphi = a_{ij} = \mathrm{const}$

実数値函数 φ_j が 上記方程式を満すなら

$$\varphi_j = \sum_i x_i a_{ij} + b_j$$

$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ が Ω_1からΩ_2への diffeo. を与へている事より. A, $b=(b_1, \cdots, b_n)$ の各成分は実数でありかつ、$\det A \neq 0$

q.e.d.

Cor. $^\forall M$について $H^i(\Omega, \mathcal{E}_M) \cong H^i(\Omega', \mathcal{E}_{M'})$

$\Rightarrow$ ΩとΩ'は 1次変換で互に写る。

この事は微分方程式が大域的に解ける等. cohomologicalな量をすべて保存する変換は1次変換以外にない事を示しています。

1. Ehrenpreis, L.: A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications. Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161~174, Jerusalem, 1961.
2. Komatsu, H.: Resolutions by Hyperfunctions of Sheaves of Solutions of Differential Equations with Constant Coefficients. Math. Annalen 176, 77–86 (1968)
3. S. Matsuura: Finite type system of partial differential operators and decomposition of solutions of partial differential equations. Katada Symposium. (1966)