数理解析研究所講究録
59巻 1968年 190-207

双曲型方程式の混合問題について

北大 理数 白田 平

§1. 序

ΩをR^nの領域, Γはその境界で十分滑らか、かつ有界とする。ΔはR^nのLaplacian, $\frac{\partial}{\partial n}$は$\Gamma$の点におけるnormal derivativeとする。このとき記述を簡単にするため唯次の混合問題のみを考えることにする。

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha(x)\Delta \right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta(x)\Delta \right) + \text{lower order term} \right) \cdot$$
$$\cdot\, u = f \qquad \text{in } (t>0,\ x\in\Omega),$$

初期条件 $\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} u\right)(0,x) = 0 \quad (i=0,1,2,3)$,

境界条件 $\left(\frac{\partial^j}{\partial n^j} u\right)(t,x) = 0 \quad x\in\Gamma,\ (j=0,1)$.

ここで$\alpha(x)$, $\beta(x)$は定まった正値函数でfは与えられた函数とする。

この種の混合問題は3変数以上の(t, x)に関しては Leray以来多くの人々により考察されたが、まだ有界領域に関しては全然研究された跡がない。

ここでAgmon及び溝畑により得られたそれぞれの結果を整理して，上述の問題との関係を調べ、この種の境界値問題の先駆とする。又この故にここでの記述のabstract version及び精密化はすべて割愛する。以後方程式の係数等はその十分高いorderの微分と共に考えている領域で一様有界とする。

（記．浅野和雄，大久保俊雄）

§2. Leray's method

H: $L^2(\Omega)$ で densely defined, strictly positive definite, selfadjoint operator,

$a_i(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$

b_i: $D(b_i) \supset D(H^{i-1})$ なる $L^2(\Omega)$ の一次作用素かつ $b_i H^{-(i-1)}$ は有界作用素 $(i = 1, 2, \cdots, m)$ in $L^2(\Omega)$

このとき

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + a_1(x) H \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots\cdots + a_m(x) H^m + B$$

$$B = b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots\cdots + b_m$$

を考える。

［定理 1］ 次の条件が満足されているものとする：

(I) $u \in D(H)$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \Rightarrow \varphi u \in D(H)$ かつ

$$\|((\varphi H) - (H\varphi))u\|_{L^2(\Omega)} \leqq K \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

for $u \in D(H)$ ここで $K = K(\varphi)$,

(Ⅱ) $\tau^m + a_1(x)\tau^{m-1} + \cdots + a_m(x) = 0$ の τ に関する根 $\tau_i(x)$ はすべての $x \in \bar{\Omega}$ に関して，純虚数，相異なり，更に zero でない。

このとき，$\forall f \in C^1([0,T], L^2(\Omega))$，$\exists^1 u(t)$

$$\left(u(t), \left(\frac{d}{dt}u\right)(t), \cdots \left(\frac{d^m}{dt^m}u\right)(t) \right)$$

$$\in C^0([0,T], D(H^m) \times D(H^{m-1}) \times \cdots \times L^2(\Omega)),$$

かつ $u(0) = \left(\frac{d}{dt}u\right)(0) = \cdots = \left(\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u\right)(0) = 0$。

（証明）$\mathcal{E}(H) = D(H^{m-1}) \times D(H^{m-2}) \times \cdots \times L^2(\Omega)$,

$$D(\mathbb{A}) = D(H^m) \times D(H^{m-1}) \times \cdots \times D(H)$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 0 & 1 \\ -a_m H_m, & \cdots & & & -a_1 H \end{pmatrix}$$

ここで $D(H^i)$ に次の norm を入れておく。$\|u\|_i = \|H^i u\|_{L^2(\Omega)}$

更に $E(H) = \begin{pmatrix} H^{m-1} & & \text{\Large 0} \\ & H^{m-2} & \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & I \end{pmatrix}$ とおく。

このとき $E(H)\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 \\ -a_m, & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix} HE(H)$，更に

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_m, & \cdots & , & -a_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -b_m, & \cdots & ,-b_1 \end{pmatrix}$$

このとき、$E(H)\mathbb{B}=\mathbb{B}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -b_m H^{-(m-1)}, & \cdots & ,-b_1 \end{pmatrix}E(H)\equiv\mathbb{B}'E(H)$

ここで $\mathbb{B}'$は$(L^2(\Omega))^m$での有界作用素となる。さてこのとき

$$E(H)\left(\frac{d}{dt}-(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right)=\left(E\frac{d}{dt}-(\mathbb{P}H+\mathbb{B})\right)E(H),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1 & \cdots & \tau_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_1^{m-1} & \cdots & \tau_m^{m-1} \end{pmatrix}=N',\ (N')^{-1}=N,\ \sqrt{-1}\mu_i=\tau_i,\ \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_m \end{pmatrix}=\mathbb{D}$$

とおけば $\mathbb{P}N'=N'i\mathbb{D}\quad(i=\sqrt{-1})$

依って $N\mathbb{P}=i\mathbb{D}N$.

a priori estimate を求める: $NE(H)(\tau E-(\mathbb{A}+\mathbb{B}))$

$=\tau NE(H)-i\mathbb{D}NE(H)-N\mathbb{B}'E(H)$

$=(\tau E-i\mathbb{D}H)NE(H)+i\mathbb{D}(HN-NH)E(H)-N\mathbb{B}'E(H),$

$HN-NH$ は条件により有界作用素に拡張されるから右辺第2、第3項を加えたものを$\mathbb{B}''NE(H)$とする。

以上の等式は$D(\mathbb{A})$において意味がある。

さて

$$NE(H):\quad \mathcal{E}(H)\longrightarrow(L^2(\Omega))^m$$
$$\qquad\qquad D(\mathbb{A})\longrightarrow(D(H))^m$$

は *isomorphic, onto* な作用素であるから

$NE(H)(\tau E-(\mathbb{A}+\mathbb{B}))(NE(H))^{-1}u$

$$= ((\tau E - iDH) + B'')u \qquad \text{for } u \in (D(H))^m.$$

これよりあるτ_0に関し，$-\tau_0 E + (A+B)$の dissipative なることは直ちにある： $\exists \tau_0 \geqq 0$

$$\mathrm{Re}(NE(H)(-\tau E + (A+B))u, NE(H)u)$$
$$= \mathrm{Re}((-\tau E + iDH)NE(H)u, NE(H)u) - \mathrm{Re}(B''NE(H)u, NE(H)u) \leqq (-\tau + \tau_0)(NE(H)u, NE(H)u)$$

ここで$\|NE(H)u\|_{L^2(\Omega)}$を$\mathcal{E}(H)$における norm と考える。

これが max-dissipative であるためには

$$\exists R(\tau, A+B) \quad \tau > \tau_0$$

が言えればよい。

これは次の事と同等：

$\tau E - iDH + B'' : (D(H))^m \to (L^2(\Omega))^m$が onto mapping。

このための証明は次のようにすれば簡潔である。

$x_0 \in \bar{\Omega}$に関し $L(x_0) = \tau_0 E - iD(x_0)H$ とおく．

Hの単位分解を利用して $\exists (L(x_0))^{-1} = R(x_0)$,

$$R(x_0) = \int_a^\infty (\tau_0 E - iD(x_0)\sigma)^{-1} \, dE_\sigma \quad (a > 0)$$

で示される。 τ_0は以後十分大きな数とする。

このことより，

$$\exists K > 0, \ \|L(x_0)u\|_{L^2(\Omega)} \geqq K\tau_0\|u\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\geqq K\|u\|_H, \quad (\|u\|_H = \|Hu\|)$$

ここで Kはτ_0やuに無関係（$D(x_0)$は対角型！）

今$\{\varphi_\nu\}$を 1 の単位分解でΩを cover し，かつ

$$\sum_{\nu=1}^{N}\varphi_\nu^2=1 \text{ on } \Omega, \quad x_\nu\in(\operatorname{supp}\varphi_\nu\text{の内部})$$ とする。

このような十分細かい分解に関して

$$R=\sum_{\nu=1}^{N}\varphi_\nu R(x_\nu)\varphi_\nu$$

とおく。

$$\mathcal{L}=\tau_0E-i\mathbb{D}H+\mathbb{B}'', \quad \mathcal{L}_0=\tau_0E-i\mathbb{D}H$$

とすれば　$u\in(L_2(\Omega))^m$に関し

$$\mathcal{L}Ru=\sum\mathcal{L}_0\varphi_\nu R(x_\nu)\varphi_\nu u+\sum\mathbb{B}''\varphi_\nu R(x_\nu)\varphi_\nu u$$
$$=\sum\varphi_\nu(\mathcal{L}_0-L_0(x_\nu))R(x_\nu)\varphi_\nu u+\sum\varphi_\nu L_0(x_\nu)R(x_\nu)\varphi_\nu u$$
$$+\sum\mathbb{B}''R(x_\nu)\varphi_\nu u \qquad (\mathbb{B}''\text{ is bounded})$$

よって

$$\|\mathcal{L}Ru-u\|_0^2\leqq K_1\left(\sum\varepsilon\|R(x_\nu)\varphi_\nu u\|_H^2+\sum\|\mathbb{B}''R(x_\nu)\varphi_\nu u\|^2\right)$$
$$\leqq K_1\left(\varepsilon\cdot\sum\frac{1}{K}\|\varphi_\nu u\|_0^2+\sum\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\tau_0}k_2\|\varphi_\nu u\|_0^2\right)$$
$$\leqq K_1\left(\frac{\varepsilon}{K}+\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\tau_0}k_2\right)\|u\|_0^2 \qquad (\|u\|_0=\|u\|_{L^2(\Omega)})$$

よって　$k_2=k_2(\varepsilon)$であるがεを十分小さくとりτ_0を十分大きくすれば$\|\mathcal{L}R-E\|_0<1$

よって　$\exists'(E-(E-\mathcal{L}R))^{-1}=(\mathcal{L}R)^{-1}:(L^2(\Omega))^m\to(L^2(\Omega))^m$,

$\mathcal{L}R(\mathcal{L}R)^{-1}=I$　依て　$\mathcal{L}^{-1}=R(\mathcal{L}R)^{-1}$.

かつ Semi-group の理論により定理は成立する。

【Remark】

以上の証明は Leray の理論の完全化である溝畑の paper と

同様であった。然し、resolution の存在は他の elliptic operator の理論を作って証明されている。尚、$\Omega = R^n$ の場合 a_i 等を singular integral operator におきかえ、夫々条件 (I)(II) を (x, ξ) に関するものとすればよい。然し、有界領域の場合特に (I) に関し (x, ξ) に関するものに出来るに足りる適切な理論はまだない。

§3 Agmon's method

ここで Agmon により得られた結果を有界領域にも利用するため、その変形を述べる。

$P_0(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, H)$, $B_{j0}(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, H)$ を夫々 $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, H$ に関する斉次な polynomial でそれぞれ次数を $2m, m_j$ ($j = 1, 2, \cdots, m$) ($2m > m_j$) とする。ここで H は t, x に独立な空間 S (変数を y と記す.) 上の $L^2(S)$ で densely defined, selfadjoint operator である。

$$\left.\begin{array}{l} \tau : -\frac{\pi}{2} < \theta = \arg \tau < \frac{\pi}{2} \\ \lambda : \text{pure imaginary} \\ \sigma : \text{real} \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} \longleftrightarrow t \\ \longleftrightarrow x \\ \longleftrightarrow y \end{pmatrix}$$

を動くものとする。

［定理 2］

P_0, B_{j0} が次の条件を満足するものとする：

(I) $|P_0(\tau,\lambda,\sigma)| \geqq K(\cos\theta)^k\,(|\tau|^2+|\lambda|^2+|\sigma|^2)^m$

$(1 \leqq k < 2m)$

(II) 境界条件，$P_0(\tau,\lambda,\sigma)=0$ のλに関する根λ_jを

$\left.\begin{array}{ll} Re\lambda_j<0 & (j=1,2,\cdots,m) \\ Re\lambda_j>0 & (i=m+1,\cdots,2m) \end{array}\right\}$ $(|\tau|^2+|\sigma|^2=1)$ とする

さらに

$$\left|\,\left|\begin{array}{c} B_{j0}(\tau,\lambda_i(\tau,\sigma),\sigma) \\ i,j=1,2,\cdots,m \end{array}\right| \Big/ \prod_{i>j}(\lambda_i(\tau,\sigma)-\lambda_j(\tau,\sigma))\right|$$

$\geqq C_0>0 \quad (\text{for } |\tau|^2+|\sigma|^2=1)$.

このとき次の a priori estimate が成立する：

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},H\right)u=f \qquad (x>0,\ t>0)$$

$$B_{j0}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},H\right)u=0 \qquad (x=0,\ t>0)$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0,x,y)=0 \qquad (y\in S,\ x>0)$$

ならば

$$|||P_0(\tau,\frac{\partial}{\partial x},H)\,\hat{u}|||_l \geqq C(l)(\cos\theta)^k\,|||\hat{u}|||_{l+2m}$$

ここで $Re\,\tau>0$, $\hat{u}$ は u の t に関する Fourier-Laplace 変換，(但し，以後 u 等は $u(t)=0$ $t<0$ と拡大されたものとする)

又 $|||\hat{u}|||_l = \sum_{i+j+k\leqq l}\|\tau^i\frac{\partial^j}{\partial x^j}H^k\hat{u}\|_{L^2(x>0,\,L^2(S))}$ とおく。

(証明)

この境界値問題に対する Green 函数を作り、これより斉次性を利用して直接証明出来る。
念のため Green 函数の作り方だけを施しておく。
まず P_0 に対する基本解 R_0 は $f \in L^2((t,x), L^2(S))$ に対して

$$(R_0 f)(t,x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\tau \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau t+\lambda x} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{P_0(\tau,\lambda\sigma)} dE_\sigma\left(\hat{f}(\tau,\lambda)\right), \qquad (c>0)$$

$\hat{f}(\tau,\lambda)$ は t, x に関する Fourier-Laplace 変換,

$$(K_0 f)(t,x) = (R_0 f)(t,x) - (R_c (R_0 f))(t,x)$$

ここで

$$R = \begin{vmatrix} B_{j0}(\tau,\lambda_i(\tau\sigma),\sigma) \\ i,j=1,2,\cdots,m \end{vmatrix} \Big/ \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$R_\nu = \begin{vmatrix} B_{10}(\tau,\lambda_1(\tau\sigma)\sigma), & \cdots, & e^{x\lambda_1(\tau\sigma)}, & \cdots\cdots, & B_{m0}(\tau,\lambda_1\sigma) \\ \vdots & & & & \\ B_{10}(\tau,\lambda_m(\tau\sigma),\sigma), & \cdots, & e^{x\lambda_m(\tau\sigma)}, & \cdots\cdots, & B_{m0}(\tau,\lambda_m,\sigma) \end{vmatrix}$$

$$\times \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}.$$

$$h_\nu = R_\nu / R$$

$$R_c(R_0 f) = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau t} \frac{h_\nu(\tau,x,\sigma) B_{\nu 0}(\tau,\lambda,\sigma)}{P_0(\tau,\lambda,\sigma)} .$$

$$\cdot\, dE_\sigma(\hat{f}(\tau,\lambda))\, d\tau\, d\lambda. \qquad (c>0)$$

これを利用して初期及び境界条件を満足する $u(t,x) \in C_0^\infty($

$-\infty < t < +\infty$, $-\infty < x < \infty$, $D(H^{(2m+l)})$)に関しRの下よりの有界性を利用して、直ちに a priori estimate を得る。

§4. Examples of well posed boundary value problem ($k=1$)

以上述べた定理を応用しながら我々の問題との関係を見ることにしよう。

(定理1の応用)

$(1-\Delta)^2$ を境界条件 $u(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad x \in \Gamma$ の下で selfadjoint 化し、これの1/4べきをHとおく。この時 $(1-\Delta)^2$ の Green 函数及び pseudo-differential operator of order 1 を利用してHは定理1の条件を満足することがわかる。

さて

$$\frac{d^4}{dt^4} + (\alpha+\beta) H^2 \frac{d^2}{dt^2} + \alpha\beta H^4,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} + (\alpha+\beta)(1-\Delta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\beta(1-\Delta)^2$$

を比較して見る。

定理1により前者は well posed な混合問題になっている。然し $D(H^4) = H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $D(H^2) = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ で、H^2 と $1-\Delta$ とは相異なる：

（補題） $u \in D(H^2)$ に関し

$$(H^2u-(1-\Delta)u)(x)=\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}-1}G_c(t,x,y)\,u(y)\,dy$$

in $L^2(\Omega)$。

ここで $G_c(t,x,y)$ は $\frac{d}{dt}-H^4$ の Green 核における補正函数。

有馬の定理より

$$\left|G_c(t,x,y)\right|\leq Ct^{-\frac{n}{2b}}\exp\left(-w\frac{(|x-y|+lx+ly)^{\frac{2b}{2b-1}}}{t^{\frac{1}{2b-1}}}\right)$$

$(b=2)$, ここで $lx=dist(x,\Gamma)$.

よって

$$\|H^2u-(1-\Delta)u\|_{L^2(\Omega')}\leq K\|u\|_0 \quad \Omega'\subset\subset\Omega$$

$(\Omega'$:compact$)$

然し、$\|H^2u-(1-\Delta)u\|_{L^2(\Omega)}$ は $\|u\|_{L^2(\Omega),2}$ でおさえられない。

従って H^2 と $1-\Delta$ は取りかえられないが、境界の近くでのもとの方程式の変形により well posed な問題に置きかえることが出来たわけである。

次に Agmon の結果を利用できる場合のある事を示し、有界領域においても我々の問題が考察に足るものであり、又反例も作りたいと思える様、次の方程式を考える。

$\Omega=\{x:|x|\leq1\}$, $\alpha_i(x)=a_i(r^2\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\quad(i=1,2)$

$a_1, a_2 > 0 \quad a_1 \neq a_2$ (const)

$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$, $\varphi_1(x) = \varphi_1(r)$, $\varphi_2(x) = \varphi_2(r)$. $|x| = r$

$\mathrm{supp}\, \varphi_1 \subset \{1-2\varepsilon < |x| < 1+2\varepsilon\}$, $\varphi_1(x) = 1$ for $1-\varepsilon < |x| < 1+\varepsilon$,

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1 \Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_2 \Delta\right) +$ lower order term $= L$ とおく

[定理3] Lに対する混合問題は次の意味で well posed である：$f(t,x) \in H_\ell(T > t \geqq -\varepsilon, \Omega)$, $(\ell \geqq 0)$ かつ $\mathrm{supp}\, f \subset \{t \mid T > t \geqq 0\}$ に対し、唯1つの解 $u(t,x) \in H_{2m+\ell-1}\ (T > t \geqq 0, \Omega)$,

かつ $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t,x) = 0 \quad (t \leqq 0,\ i = 0,1,2,3)$

$\frac{\partial^j u}{\partial n^j}(t,x) = 0 \quad (|x| = 1,\ j = 0,1)$ が存在する。

(証明)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1 \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{H^2}{r^2}\right)$$

ここで H^2 は Laplace-Beltrami の operator と考えられる $S = \{x : |x| = 1\}$ 上の selfadjoint operator である。$r = 1$ の近傍で $\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ は lower order term だから除くとLの principal part は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{H^2}{r^2}\right)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{H^2}{r^2}\right)\right)$$

更に変換 $r = e^{-r'}$により

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2}-\left(\frac{1}{a_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+H^2\right)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2}-\left(\frac{1}{a_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+H^2\right)\right)$$

を principal part とし（$\varepsilon \geqq r' \geqq 0$），これを定理2の$P_0$とおく。$u=0, \frac{\partial u}{\partial r'}=0$，に関しては定理2の条件は勿論満足されているから特に§3の記号で，$\mathrm{Re}\,\tau > \tau_0$，任意の$l \geqq 0$に対して $|||P_0(\tau, \frac{\partial}{\partial r'}, H)\hat{u}|||_l \geqq C(l)(\mathrm{real}\,\tau)|||\hat{u}|||_{l+2m-1}$ が成立する。但し，$\mathrm{supp}\,u \subset \{|r'|<\delta\}$（$\delta$：十分小）とする。このとき容易に lower order term を附加してもよく，$r=e^{-r'}$で元にもどしても不等式は成立する。内部領域では勿論これは境界のない場合の不等式だから成立する。partition of unity を用いて，境界条件を満足するuに対して$\mathrm{Re}\,\tau > \tau_0$（$\tau_0$十分大）に対し（$l \geqq 0$）$|||L(\tau, \frac{\partial}{\partial r}, H)\hat{u}|||_l \geqq C(l)(\mathrm{Re}\,\tau)|||\hat{u}|||_{l+2m-1}$ が成立する。τが real 近くにあるとき，Lの逆が存在することは明らかだから，この不等式及び closed graph theorem により，不等式が成立する限りのλに対し，逆 operator が存在する。このとき Fourier-Laplace 変換を行えば，解の存在は分る。十分滑らかな解が求められたから，一意性はこの場合明らかである。（ここで $|||\hat{u}|||_k = \sum_{|\alpha|+|\nu|\leq k} \|\tau^{\nu} D_x^{\alpha}\hat{u}\|_{L^2(\Omega)}$）

【Remark】 大部分のこの方面の論文はL^2の1空間で考えられている。これは定理3のtypeの評価式があれば，局所理論より大域理論へ持ち込めることによるが，係数の変化を押え

る十分な理論がない。一般に定係数のとき、我々の混合問題を考える場合、係数の少しの変化でwell posedな問題へ方程式をかえる事は可能であろうか。

§5 An other example

lower order termを適当にとればwell posedになる様な混合問題の例を考えて見る。4分の1空間 $(t>0, x>0)$ で $(a \neq b,\ a>0,\ b>0)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A(x)\right)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(b\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A(x)\right)\right)$$

$$A(x) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right) - c_0, \quad (a_{ij} \gg 0,\ c_0>0)$$

lower order termを除けば、一般に

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + a_1\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + H\right)\frac{\partial^{2(m-1)}}{\partial x^{2(m-1)}} + \cdots + a_{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + H(x)^2\right)^m$$

という型に書ける。$(m=2$の場合$)$、ここで$H(x)$はxにdependするy-空間のdensely defined selfadjoint, strictly positive definite operator（但し domainはxにdependしないものとする）

§4と同様にtに関するFourier-Laplace変換で

$$L(\tau) = \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + a_1(x)\left(\tau^2 + H(x)^2\right)\frac{d^{2(m-1)}}{dx^{2(m-1)}} + \cdots + a_{2m}(x)\left(\tau^2 + H(x)^2\right)^m$$

が$\mathrm{Re}\,\tau > \tau_0$（$\tau_0$十分大）で、$L^2(R_{(y,x)})$で逆を持ち、そのnormが一定ならば、我々の混合問題はwell posedになる。

§2におけるように

$$\lambda^{2m}+a_1(x)\lambda^{2(m-1)}+\cdots\cdots+a_{2m}(x)$$

の根λ_iは real, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m>0$, $\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_{2m}<0$と仮定し、それらは相異なるものとする。但しこれらの条件においてxに対する一様性は仮定されているものとする。方程式を系に、$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=u_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,2m-1)$ とおいて

$$E\frac{d}{dx}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & \cdots & 1 & \\ -a_{2m}(\tau^2+H^2)^m, & 0, & \cdots\cdots & -a_1(\tau^2+H^2), & 0 \end{pmatrix}-B$$

$$=E\frac{d}{dx}-(A+B)$$

とする。ここで $B=b_1\frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}}+\cdots\cdots+b_{2m}$;

b_i; xに関する係数を持った、τ, $H(x)$に関する order$(i-1)$ の polynomial で、$b_i(\tau^2+H(x)^2)^{-\frac{(i-1)}{2}}$が$(\tau, x)$に関し一様有界 in $L^2(R_y)$. $(\tau^2+H(x)^2)^{\frac{1}{2}}$はH(x)の単位分解を利用して

$$\mathrm{Re}\left((\tau^2+H(x)^2)^{\frac{1}{2}}u, u\right) \geqq k_0(\mathrm{Re}\,\tau)\|u\|_0^2$$

なる様に定義されるものとする。§2と同様に

$$N'=\begin{pmatrix} 1, 1, & \cdots\cdots & , 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{2m-1}, \lambda_2^{2m-1} & \cdots\cdots & \lambda_{2m}^{2m-1} \end{pmatrix}, \quad (N')^{-1}=N,$$

$$E(H)=\begin{pmatrix} (\sqrt{\tau^2+H(x)^2})^{2m-1} & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{pmatrix}$$ とおく。

$$NE(H)\left(E\frac{d}{dx}-(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right)=\left(E\frac{d}{dx}-\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{2m}\end{pmatrix}\sqrt{\tau^2+H(x)^2}-\mathbb{B}'\right)$$

$\times NE(H)$、ここで $\mathbb{B}'=(\mathbb{B}$より作られる有界作用素$)+N(\frac{dN'}{dx})$

である。

$$E'=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} m & m \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} m \\ m \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} k & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & k & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

（k：十分大）を乗ずる

$$\left(E'NE(H)\left(E\frac{d}{dx}-(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right)v, NE(H)v\right)_{L^2([0,\infty)\times R_y)}$$

$$=\left(E'NE(H)v, NE(H)v\right)_{L^2(R_y)}\Big|_0^\infty-\left(\left(\begin{array}{ccc|ccc} k\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & k\lambda_m & & & \\ \hline & & & -\lambda_{m+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_{2m}\end{array}\right)\sqrt{\tau^2+H(x)^2}\right.$$

$$\left.\cdot NE(H)v, NE(H)v\right)-\left(\mathbb{B}'NE(H)v, NE(H)v\right)$$

ここで $-\left(E'NE(H)v, NE(H)v\right)_{L^2(R_y)}\Big|_{x=0}$

$$=k\left(\|(NE(H)v)_1\|^2+\cdots+\|(NE(H)v)_m\|^2\right)$$

$$-\left(\|(NE(H)v)_{m+1}\|^2+\cdots+\|(NE(H)v)_{2m}\|^2\right)\geqq 0$$

なる様に、我々の境界条件ではkを十分大なる様にすれば出来る。従って、$\exists k_1$

$$\left\|NE(H)\left(E\frac{d}{dx}-(\mathbb{A}+\mathbb{B})\right)v\right\|_{L^2((0,\infty)\times R_y)}$$

$$\geqq k_1(\mathrm{Re}\,\tau)\|NE(H)v\|_{L^2((0,\infty)\times R_y)}$$

ここでvは無限遠で zero な十分滑らかな函数　依って次の

a priori 不等式が成立する：

$\exists k_2 > 0$

$$k_2 \|Lu\|_0 \geqq (\mathrm{Re}\,\tau)^{2m}\|u\|_0 + \cdots + (\mathrm{Re}\,\tau)\left\|\frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}}u\right\|_0$$

$$\left(\|\ \ \|_0 = \|\ \ \|_{L^2([0,\infty)\times R_y)}\right)$$

さて$L(\tau)$はτ: real (十分大)で逆を有し，かつ

$$\|L(\tau)u\|_0 + k(\tau)\|u\|_0 \geqq k\|u\|_{2m} \quad \mathrm{Re}\,\tau > 0$$

であるから§4と同様に closed graph theorem により．十分 real part が大なるτに関し、逆をもつ。この場合逆はτに関し analytic．更に$L(\tau)u=f$の解の regularity 及びその微分に関する a priori 評価式も共に出ることはE'の代りに$E'(\sqrt{|\tau|^2+H(x)^2})^\ell$等を考えれば見やすい。依って［定理3］と同様に十分滑らかな解が存在することがわかった。

［Remark］ これは2変数(t,x)の場合の拡張であるが同時に Agmon の結果の変数係数の場合への多少の拡張にもなっている。しかし"lower order term を適当にとれば"ということで、この考えでは partition of unity を利用することは最早できない。しかし、我々の問題の様にどんな lower order term を付けても出来るか否かの反例を挙げるのにその一歩手前として役立つかも知れない。

[1] S. Agmon : Colloques sur les équations aux dérivées partielles, C.N.R.S. (1962) 13–18

[2] M.S. Agranovič and M.I. Vishik : Russian Math. Surveys, (1964) Vol. 19 Nr. 3 53–157

[3] R. Arima : J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964) 207–244

[4] J. Leray : The Institute for Advanced Study Princeton N.J. (1952)

[5] S. Mizohata : Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France (1966–1967) 23–60

[6] K. Yosida : Functional Analysis. Springer-Verlag (1966)