

局所凸線形位相空間における

線形作用素の半群について

東京女子大 文理 高村 多賀子

§ 1. 序文

本稿は局所凸線形位相空間における線形作用素の作る半群で、必ずしも同等連続でない場合について、その生成を論じているが目的である。

従来の Banach 空間における線形作用素の作る半群の理論は、近年 Schwartz [5], 宮寺 [4], 吉田 [6], 小松 [2], その他により、局所凸空間における線形作用素の同等連続な半群の場合に拡張されたが、その議論は Banach 空間の場合とはほぼ平行になされた。すなわち  $\{T_t; t \geq 0\}$  を局所凸空間  $E$  における同等連続な半群とし、 $A$  をその生成作用素とすると、 $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  なる複素数  $\lambda$  に対して、 $T_t$  の Laplace 変換と  $A$  の resolvent が存在して

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_t x dt = (\lambda I - A)^{-1} x, \quad x \in E$$

が成立し、この関係以上の理論において核心をなしている。

しかしに同等連続でない半群の場合には, その Laplace 変換も, その生成作用素の resolvent も, しばしば存在しないので, 異つた取扱いが必要となる。ここでは一般 Laplace 変換の概念を導入することにより, いち中の Hille-Yosida の定理に相当するものが得られることを示そう。

## § 2. 半群の基本性質

$E$  を局所凸線形位相空間とし,  $L(E, E)$  を  $E$  から  $E$  への変換線形作用素の全体とする。

定義. 作用素の族  $\{T_t; t \geq 0\} \subset L(E, E)$  が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき 半群 と呼ばれる。

$$(1) \quad T_t T_s = T_{t+s}, \quad t, s \geq 0,$$

$$(2) \quad T_0 = I$$

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow s} T_t x = T_s x, \quad s \geq 0, \quad x \in E.$$

さらに, 半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  が任意の  $0 < s < \infty$  に対して, 部分族  $\{T_t; 0 \leq t \leq s\}$  が同等連続 (i.e.  $E$  の任意の連続双 seminorm  $\rho$  に対して,  $E$  の他の連続双 seminorm  $\varphi$  が存在して, すべて  $0 \leq t \leq s, x \in E$  に対して  $\rho(T_t x) \leq \varphi(x)$  が成立) のとき, 局所同等連続 と呼ばれる。

注意 もしも  $E$  が tonnelé ならば, 半群はすべて局所同等

連続になった。

半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の 生成作用素  $A$  は

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_h - I)x$$

によって、右辺の極限が  $E$  の中に存在するとき定義される。

このとき同等連続な半群の場合と同様にして、次の基本的な事柄が成立する：

$\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  における半群とし、 $A$  をその生成作用素とするとき、もし  $x \in D(A)$  ならば、 $T_t x \in D(A)$ 、 $t \geq 0$  かつ  $T_t x$  は  $t$  について連続的微分可能で

$$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x, \quad t \geq 0$$

が成立する。

さらに、もし  $E$  が真列完備ならば、 $D(A)$  は  $E$  で稠密である。またもし  $\{T_t; t \geq 0\}$  が局所同等連続ならば、 $A$  は閉作用素である。

### §3. 一般 Laplace 変換

$\mathcal{D}$  は  $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$  で定義された複素数値無限回連続可微分 compact 区間をもつ関数の空間とし、 $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$ 、 $-\infty < a < \infty$  を  $\mathcal{D}$  の  $(-\infty, a]$  に入るような  $\mathcal{D}$  の元の全体とし、これらに通常の位相を導入する。各  $\varphi \in \mathcal{D}$  に対し、 $\mathcal{L}\varphi$  の 共役 Laplace 変換

$\hat{\varphi}$  を

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} \varphi(t) dt \quad (\lambda: \text{複素数})$$

で定義し, 変換  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$  を  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  の像を  $\hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}$  とし,  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  から  $\hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}$  へ位相同形になるような位相を入れよう。

さて, 以下  $E$  を実数完備とし,  $a > 0$  を一固定する。  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  から  $E$  の中への連続線形作用素の全体  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  を考え,  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  の  $\mathcal{D}$  への有界集合上の一様収束位相を入れよう。また  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  についても同様。

$$\mathcal{D}'_a(E) = \{ F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E); F(\varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, 0]} \},$$

$$\mathcal{D}''_a(E) = \{ \hat{F} \in L(\hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}, E); \hat{F}(\hat{\varphi}) = 0, \forall \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, 0]} \}$$

とすると, これら  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E), L(\hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}, E)$  から位相を導き出す。

各  $F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  に対して,  $\varphi$  の 一般 Laplace 変換  $\hat{F}$  を

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = F(\varphi), \quad \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}$$

によって,  $L(\hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}, E)$  の元として定義される。このとき対応  $F \leftrightarrow \hat{F}$  によって  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  と  $L(\hat{\mathcal{D}}_{(-\infty, a]}, E)$ , さらに  $\mathcal{D}'_a(E)$  と  $\mathcal{D}''_a(E)$  は位相同形になっている。この二つの空間  $\mathcal{D}'_a(E)$  と  $\mathcal{D}''_a(E)$  が我々の理論において重要な役割を演じたのである。

Dirac 測度  $\delta$  に対して  $\delta \otimes x \in \mathcal{D}'_a(E)$  ( $\forall x \in E$ ) である, また

$$(\delta \otimes x)^\wedge = 1 \otimes x \in D_a^1(E)$$

と成す。

#### § 4. 一般 resolvent

$\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  における局所同等連続な半群とし、これを  $t < 0$  に対しては  $T_t = 0$  とおいて拡張し  $\{T_t; -\infty < t < \infty\}$  を作り、各  $x \in E$  に対して  $T_t x$  は  $\mathcal{D}_a^1(E)$  の元として考えられよう。さらに、各  $F \in \mathcal{D}_a^1(E)$  に対して合成積  $F * T_t \in \mathcal{D}_a^1(E)$  を

$$(F * T_t)(\varphi) = \int_0^\infty T_t(F(\tau_{-t}\varphi)) dt \quad (= \int_0^\infty T_t(F(\tau_{-t}\varphi)) dt), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{[-\infty, \infty]}$$

によって定義され（ただし  $\tau_{-t}\varphi(s) = \varphi(s+t)$ ）、変換  $F \rightarrow F * T_t$  は  $\mathcal{D}_a^1(E)$  において連続と成す。とくに

$$(\delta \otimes x) * T_t = T_t x.$$

$\mathcal{D}_a^1(E)$  における作用素  $* T_t$  に対応して、 $D_a^1(E)$  においては作用素  $R$  を考えよう。すなわち

$$R \hat{F} = (F * T_t)^\wedge, \quad \hat{F} \in D_a^1(E)$$

によって  $D_a^1(E)$  から  $D_a^1(E)$  の中への作用素  $R$  を定義すると、 $R$  は  $D_a^1(E)$  で連続である、

$$R(1 \otimes x) = (T_t x)^\wedge$$

が成立する。

$\hat{F} \in D_a^1(E)$  に対し  $\lambda \hat{F} \in D_a^1(E)$  を

$$(\lambda \hat{F})(\hat{\varphi}) = \hat{F}(\lambda \hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in D_{(-\infty, a]}$$

により定義される。

定義  $A \in E$  に属する線形作用素  $A$  とき、 $D_A(E)$  に属する線形作用素  $A$  とき、任意の  $\hat{\varphi} \in D_{(-\infty, a]}$  について  $\hat{F}(\hat{\varphi}) \in D(A)$  かつ変換  $\hat{\varphi} \rightarrow A(\hat{F}(\hat{\varphi}))$  が  $D_A(E)$  に属するよう  $\hat{F} \in D_A(E)$  に対して

$$(A \hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\hat{\varphi})), \quad \hat{\varphi} \in D_{(-\infty, a]}$$

により定義する。作用素  $\lambda - A$  に対して  $D_A(E)$  上で定義された連続な逆作用素  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在するとき、これを  $A$  の 一般 resolvent と呼ぶ。

命題  $E$  は 良列完備とし、 $\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  に属する局所同等連続な半群、 $A$  はその生成作用素とすると、 $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在して  $\mathbb{R}$  に属する。

したがって

$$(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x) = (T_t x)^{\wedge}, \quad x \in E$$

が成立する。

## §5. Hille-Yosida の定理

定義  $\hat{F} \in D_A(E)$  とする。複素数平面  $\mathbb{C}$  の右半面  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  に属する  $E$ -値正則関数  $\hat{F}(\lambda)$  が  $\hat{F}$  の 表現 であるとは

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = \frac{1}{i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) \hat{F}(\lambda) d\lambda, \quad \forall \hat{\varphi} \in D_{(-\infty, \alpha]}, \forall \mu > 0$$

が成立するときにいう。次に  $E$  における線形作用素  $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在しているとき、 $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  において定義された  $L(E, E)$ -値関数  $R(\lambda)$  が  $(\lambda - A)^{-1}$  の表現であるとは、すなわち  $x \in E$  に対して  $R(\lambda)x$  が  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  における  $E$ -値正則関数で、かつ  $(\lambda - A)^{-1}(ix)$  の表現になっているときにいう。

このとき Hille-Yosida の定理は次の形に述べられる。

定理  $E$  を実列完備な局所凸空間とする。このとき  $E$  における線形作用素  $A$  が、一意に決定される局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素であるための必要十分条件は、 $A$  が次の二条件を満足することである：

1)  $A$  は稠密な定義域  $D(A)$  をもつ閉作用素である。

2) 任意の  $\alpha > 0$  に対し、空間  $D_\alpha(E)$  において次の条件が満たされる：

(a)  $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在する。

(b)  $(\lambda - A)^{-1}$  の表現  $R(\lambda)$  で、族  $\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu); \mu > 0, n = 0, 1, 2, \dots \right\}$  が同等連続であることである。

注意 1 同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の場合には、通常の Laplace 変換

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt, \quad x \in E$$

(2)  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  における  $E$ -値正則関数で,  $(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x) = (T_t x)^\wedge$  の表現になつてゐる, 亦ち  $R(\lambda)$  は  $(\lambda - A)^{-1}$  の表現であり, さらに

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda)x = (-1)^n \lambda^{n+1} (\lambda I - A)^{-(n+1)} x, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0$$

が成立してゐる. (5) によつて上の定理は同等連続な半群に対する Hille-Yosida の定理の直接の拡張になつてゐる.

注意 2. 定理の十分条件に關しては, 2) は或る  $a > 0$  に対して満たされてゐればよい.

[証明の概略]

必要性:  $A$  が局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素であるとき,

$$R(\lambda)x = \int_0^a e^{-\lambda t} T_t x dt, \quad x \in E$$

と示すことができる.

十分性:  $1 \otimes A$  (1) と一つの  $a > 0$  に対して 2) を満足すると仮定する.

Heaviside 関数  $Y \in \mathcal{D}'$  (i.e.  $t \geq 0$  で  $Y(t) = 1$ ,  $t < 0$  で  $Y(t) = 0$ ).

一方, 作用素  $\lambda$  に対して  $\mathcal{D}'_a(E)$  上連続な逆作用素  $\lambda^{-1}$  が存在し

$$\lambda^{-n}(1 \otimes x) = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \otimes x \right\}^\wedge, \quad x \in E, \quad n=1, 2, \dots$$

が成立する.

$x \in \mathcal{D}(A^3)$  に対して

$$(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x) = \lambda^{-1}(1 \otimes x) + \lambda^{-2}(1 \otimes Ax) + \lambda^{-3}(1 \otimes A^2x) + \lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$$

と書か、 $\lambda^{-1}(1 \otimes x)$ ,  $\lambda^{-2}(1 \otimes Ax)$ ,  $\lambda^{-3}(1 \otimes A^2x)$  の一般逆 Laplace 変換は上式より、 $Y \otimes x$ ,  $tY \otimes Ax$ ,  $\frac{t^2}{2!} Y \otimes A^2x$  である。  $\lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$

に関して (a) より  $\mu$  と  $\mu_0$  と

$$S_t x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda^3} R(\lambda)(A^3x) d\lambda, \quad \mu > 0$$

とおく。 (b) より 各  $\mu_0 > 0$  に対して、 $R(\lambda)(A^3x)$  が  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \mu_0$  で有界となることより、右辺の積分は絶対収束し、その値は  $\mu$  に無関係である。 また  $S_t x$  は  $t$  について連続微分可能で、 $t \leq 0$  で  $S_t x = 0$  となるから、 $S_t x$  は  $\mathcal{B}_a(E)$  の一つの元であり、 $\lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$  の一般逆 Laplace 変換となる。

$$T_t x = Y(t)x + tY(t)Ax + \frac{t^2}{2!} Y(t)A^2x + S_t x, \quad t \leq a$$

とおく。  $T_t x$  は  $(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x)$  の一般逆 Laplace 変換となる。 また  $\{T_t; t \leq a\}$  は  $D(A^3)$  において同等連続となり、 $D(A^3)$  は  $E$  で稠密となるので、 $\{T_t; t \leq a\}$  は  $E$  全体に同等連続に拡張出来る。 拡張したものを互同じく  $T_t$  で表わすと、各  $x \in E$  に対して  $T_t x$  は  $(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x)$  の一般逆 Laplace 変換となる。 さらに  $x \in D(A)$  ならば  $T_t x \in D(A)$  かつ

$$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x, \quad 0 \neq t \leq a$$

が成立し、これより  $\{T_t; 0 \leq t \leq a\}$  の半群性  $T_{t+s} = T_t T_s$  が示され、この性質を用いて  $T_t \in t > a$  に拡張して得られる局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  に対して、 $A$  はその生成作用素となっている。

## 文 献

- [1] E. Hille & R.S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).
- [2] H. Komatsu, *Semi-groups of operators in locally convex spaces*, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230-262.
- [3] T. Kōmura, *Semigroups of operators in locally convex spaces*, J. Funct. Anal., 2 (1968).
- [4] I. Miyadera, *Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations*, Tohoku Math. J., 11 (1959), 162-183.
- [5] L. Schwartz, *Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups*, Tata Institute of Fundamental Research, 1958.
- [6] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer, 1965.