数理解析研究所講究録
59巻 1968年 68-84

一様伝播系の散乱問題

京大理　池部晃生

§0.

Maxwell 方程式など古典物理学に現われる伝播現象を記述する一階微分方程式系に対して標題の uniformly propagative system なる名称を与えたのは Wilcox [1] が最初らしい (?). ここでは少し違う formulation を行うが，本質的には大した違いはないであろう．後述 (§3) の non-static uniformly propagative system に関しては Lax-Phillips [2] の研究があり，外部問題を扱っている．定数係数の Maxwell 方程式に関しては，Schmidt ([3] 及び [2] の Appendix) による外部問題の研究がある．Maxwell 方程式は波動方程式と密接な関係があり，彼はこれを利用している．以下に述べるのは一般の uniformly propagative system に対する wave operator の存在と不変性についてである．（外部問題ではなく全空間の問題である．perturbed system は当然変数係数．） wave operator の完全性については最後に触れる．

§1. Uniformly propagative systems

古典物理に現われる wave propagation 現象の多くは，次の１階偏微分方程式系で記述される：

$$(1.1)\qquad E(x)\frac{\partial}{\partial t}u=\sum_{j=1}^{m}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}u.$$

x は空間変数で $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$． t は時間変数で $t\in R^1$．$E(x)$ は空間を充す medium によって決る量であって，positive definite $m\times m$ matrix の値をとる函数．A_j は constant, symmetric $m\times m$ matrix． $u=u(x)$ は m-vector valued function ($u(x)\in\mathbb{C}^m$)．

先ず，medium が一様である場合を考える．このとき $E(x)$ は constant になるが，これは unit matrix としてよい．(1.1) において A_j の代りに $E^{-\frac{1}{2}}A_jE^{-\frac{1}{2}}$ を考えればよいからである．かくして，$\partial/\partial t=\partial_t$，$\partial/\partial x_j=\partial_j$ と略記して

$$(1.2)\qquad \partial_t u=\sum_{j=1}^{m}A_j\partial_j u$$

を得る．(1.2)の特性方程式

$$(1.3)\qquad P(\lambda;\xi)=det(\lambda I-\sum_{j=1}^{m}A_j\xi_j)=0$$

の根を，$\lambda_1(\xi),\lambda_2(\xi),\cdots,\lambda_m(\xi)$ とする．これらの中には等しいものがあってもよいが，decreasing order にならべ

であるものとする：

(1.4) $$\lambda_1(\xi) \geqq \lambda_2(\xi) \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_m(\xi).$$

このとき次の関係は容易に示される：

(1.5) $$\lambda_j(-\xi) = -\lambda_{m-j+1}(\xi) \quad (j=1,\cdots,m).$$

方程式系(1.2)が uniformly propagative であるとは次の何れかが成立つことと定義する：

i) $|\xi|=1$ に対して $\lambda_j(\xi) \neq 0$ for all j, すなわち $\sum A_j \xi_j$ が non-singular である；

ii) $|\xi|=1$ に対して

(1.6) $$\lambda_1(\xi) \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_p(\xi) > 0 = \lambda_{p+1}(\xi) = \cdots\cdots = \lambda_{m-p}(\xi) > \\ > \lambda_{m-p+1}(\xi) \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_m(\xi)$$

なる整数 $p \leqq \frac{m}{2}$ が ξ に無関係に存在する.

i) の場合には m は偶数でなければならない. ii) の場合には m の偶奇は問わないが, $\sum A_j \xi_j$ の positive, 0, negative eigenvalues に対応する部分空間の次元はそれぞれ一定である. 特に positive (eigenvalues に対応する) eigenspace と negative eigenspace の次元は一致する.

上にあげた uniformly propagative system の定義は C.

Wilcoxのそれとは異なるが，less restrictiveである（Wilcox [1]を見よ）.

次に，(1.1)または(1.2)の右辺に現われる微分作用素について考える。$\mathbb{C}^m$におけるscalar productを

$$(1.7)\qquad \langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{m} u_j \overline{v_j}$$

で表わす. $u \in \mathbb{C}^m$の長さは

$$(1.8)\qquad |u| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{L}_2$を次のように定義する：

$$(1.9)\qquad \mathcal{L}_2 = [L_2(R^n)]^m = \{u : \int |u(x)|^2 dx\}.$$

積分範囲を明記しない場合は，いつでもR^n上での積分と解する. $\mathcal{L}_2$は通常の和とスカラー乗法によってvector spaceとなるが，更にnormとinner productを

$$(1.10)\quad \|u\|_1 = \left[\int |u(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (u, v)_1 = \int \langle u(x), v(x)\rangle dx$$

で定義すればHilbert spaceとなる. これを$\mathcal{H}_1$で表わす.

さて形式的微分作用素

$$(1.11)\qquad Tu(x) = i\sum_{j=1}^{m} A_j \partial_j u(x)$$

を考えよう. $u(x)$ の Fourier 変換 $\hat{u}(\xi)$ を

(1.12) $$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-i\xi\cdot x} u(x)\,dx$$

で定義すれば, 形式的に

(1.13) $$(Tu)^{\wedge}(\xi) = -\sum_{j=1}^{m} A_j \xi_j \hat{u}(\xi)$$

を得る. (1.13) 右辺の multiplicative operator を通じて, H_1 を次のように定義する:

(1.14) $$(H_1 u)^{\wedge}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} A_j \xi_j \hat{u}(\xi) \quad \text{for } u \in \mathcal{D}(H_1) = \{u \in \mathcal{L}_2 : \sum A_j \xi_j \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}_2\}.$$

($\mathcal{D}(H_1)$ = H_1 の定義域). H_1 は self-adjoint になるが, 一般には elliptic とはならないので $\mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}^1_{L_2} \equiv \{u \in \mathcal{L}_2 : \xi_j \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}_2$ for all $j\}$ とはならない.

次に (1.1) に associate する self-adjoint operator を決める. そのために $E(x)$ に対して次のように仮定する

(1.15) $$\exists\, c, c' > 0 \text{ such that } cI \leq E(x) \leq c'I, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{L}_2$ に norm および inner product を

(1.16) $$\|u\|_2 = (u,u)_2^{\frac{1}{2}}, \quad (u,v)_2 = \int \langle E(x)u(x), v(x) \rangle\, dx$$

のように定義してできる Hilbert space を $\mathfrak{H}_2$ とする. $\mathfrak{H}_1$-norm と $\mathfrak{H}_2$-norm とは同等である:

$$(1.17)\qquad c\|u\|_1^2 \leq \|u\|_2^2 \leq c'\|u\|_1^2 .$$

$\mathfrak{L}_2$ における operator H_2 を

$$(1.18)\qquad H_2 u = E^{-1} H_1 u \quad \text{for } u \in \mathcal{D}(H_2) = \mathcal{D}(H_1)$$

と定義する. ただし E^{-1} は $E(x)^{-1}$ による multiplicative operator. H_2 を $\mathfrak{H}_2$ における operator と見做せば, selfadjoint になることは次の関係から明らかであろう:

$$(1.19)\qquad (H_2 u, v)_2 = \int \langle E(x)E(x)^{-1}(H_1 u)(x), v(x)\rangle dx = (H_1 u, v)_1 .$$

H_1 の spectral properties は (1.14) から略明らかであろう. 今, $\omega \in S^{n-1}$ ($|\omega| = 1$) として, $-\sum A_j(\sigma\omega_j)$ の固有値 $-\sigma\lambda_k(\omega)$ とそれに属する (normalized) 固有 vector $r_k(\omega)$ を考えよう. $r_k(\omega)$ が σ に依らないように, また関係

$$(1.20)\qquad r_k(-\omega) = + r_{k'}(\omega) \qquad k' = m - k + 1$$

を満すように, ω の可測函数として $r_k(\omega)$ をとることが出来ることはよいであろう. そこで $\hat{u}(\sigma\omega)$ の $r_k(\omega)$ 成分

$$\hat{u}_k(\sigma\omega) = \langle \hat{u}(\sigma\omega), r_k(\omega) \rangle \tag{1.21}$$

を考え，更に

$$\tilde{u}(\sigma, \omega) = \hat{u}(\sigma\omega), \quad \tilde{u}_k(\sigma, \omega) = \hat{u}_k(\sigma\omega) \tag{1.22}$$

なる関係で $\sigma < 0$ まで定義域を拡張しておけば，函数 $\tilde{u}_k(\sigma, \omega)$ の作る空間を適当に normalize することによつて，この空間においては，$-\sum A_j \xi_j$（これは定義から H_1 と unitary 同値）が σ を掛ける演算で表わされることがわかる．ただし，これは $k=1, \cdots, p$ の場合（$k=m-p+1, \cdots, m$ の場合は σ の範囲を負まで拡張したことによつて cover されている）であつて，$k=p+1, \cdots, m-p$ の場合は，明らかに 0 を作用させることと同等である．以上のことから H_1 の絶対連続スペクトルは実軸全体を覆い，特異スペクトルは $\{0\}$ であることがわかるであろう．

§2. Wave operator の存在と不変性

H_1, H_2 をそれぞれ Hilbert spaces $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ で働く self-adjoint operators とする．また J を $\mathfrak{H}_1$ から $\mathfrak{H}_2$ への bounded operator とする．このとき，H_1, H_2, J によつて決定される wave operator $W(H_2, H_1; J)$ を

$$(2.1) \qquad W(H_2, H_1; J) = \underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_2} J e^{-itH_1} P_1$$

で定義する．ここに s-lim = strong limit，P_1 は H_1 の絶対連続部分空間への orthogonal projection である．$t\to-\infty$ の極限も同様に考えられるが，取扱いは $t\to\infty$ のときと同じなので，(2.1) だけを考察する．

先ず H_1 は §1 で定義した H_1 で，uniformly propagative system を characterize していると仮定する．

次に H_2 に対する仮定であるが，これも前§で定義した H_2 であって，$E(x)$ が遠方で I に近づくものとする．もっと詳しく云えば

$$(2.2) \qquad (1+|x|^2)\|E(x)-I\| \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

と仮定する．(2.2) における norm は $\mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^m$ への作用素に対する適当な norm である．

Hilbert spaces $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ も前§で導入したものを考える．したがって，$\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{H}_2$ とは vector space としては同じもの $\mathcal{L}_2$ である．

J — identification operator とよばれる — は

$$(2.3) \qquad \mathfrak{H}_1 \ni u \longrightarrow Ju = u \in \mathfrak{H}_2$$

と定義する。この identification operator の撰び方は，特にこうしなければならないというわけではない。実際

$$(J_a u)(x) = E(x)u(x), \tag{2.4}$$

$$(J_b u)(x) = E(x)^{-\frac{1}{2}} u(x) \tag{2.5}$$

などで定義されるものも考えられる。しかも J, J_a, J_b は wave operator を問題にする場合には，ある意味ですべて同等であることが示される（Kato [4] 参照）。

我々の目的は $W(H_2, H_1 ; J)$ の存在を示すことにある（尤も存在は，Wilcox [1] が $E(x)$ に対するもっと弱い条件で示している。ただし彼の uniformly propagative systems に対してである）。

そこで今，

$$W(t) = e^{itH_2} J e^{-itH_1} \tag{2.6}$$

とし，$u \in \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H_2)$ をとって $W(t)u$ を t について微分して，更に積分した結果を見よう：

$$W(t)u = Ju + i\int_0^t e^{itH_2}(H_2 J - JH_1) e^{-itH_1} u\, dt \tag{2.7}$$

従って，$W = W(H_2, H_1 ; J)$ の存在を示すためには

(2.8) $$\int_0^\infty \|(H_2J-JH_1)e^{-itH_1}u\|dt<\infty$$

を見れば十分である．ここでの$\| \ \|$は$\mathfrak{H}_1$より$\mathfrak{H}_2$へのoperator normである．しかも$\|W(t)\|$が一様有界であるから，uは$P_1\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{D}(H_1)$でdenseな集合からとってきたものを考えれば十分である．

今$\varphi(\cdot)$を実軸上の実数値函数として，(2.7)，(2.8)におけるuを$e^{-is\varphi(H_1)}u$で置換えてみる．そうして(2.8)ばかりでなく

(2.9) $$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty\|(H_2J-JH_1)e^{-itH_1}e^{-is\varphi(H_1)}u\|dt=0$$

が成り立ったとしよう．そうすると，先ず(2.7)より

(2.10) $$We^{-is\varphi(H_1)}u=Je^{-is\varphi(H_1)}u+i\int_0^\infty\cdots e^{-is\varphi(H_1)}u\,dt$$

であるから，(2.9)によって

(2.11) $$Je^{-is\varphi(H_1)}u-We^{-is\varphi(H_1)}u\to 0\quad(s\to\infty)$$

が得られる．ここでWのintertwining property

(2.12) $$We^{-is\varphi(H_1)}=e^{-is\varphi(H_2)}W$$

（これはWの定義(2.1)より従う．詳しくは[4]参照）を

用いると，(2.11) に左から $e^{is\varphi(H_2)}$ を掛けることによって

$$(2.13)\qquad e^{is\varphi(H_2)}Je^{-is\varphi(H_1)}u\to Wu\quad(s\to\infty)$$

が得られる．このことは $W(\varphi(H_2),\varphi(H_1);J)$ が存在して $W=W(H_2,H_1;J)$ に等しいことを示している．これが wave operator の不変性とよばれている事実である．

故に，$\mathcal{D}$ を $e^{-is\varphi(H_1)}u$, $u\in\mathcal{D}$, $s>0$, が $\mathcal{D}(H_1)=\mathcal{D}(H_2)$ に属するような $\mathfrak{H}_1$ の fundamental set として，$u\in\mathcal{D}$ について (2.9) を示せば，W の存在と不変性が示されることになる．

φ は 区分的になめらか，かつ strictly increasing とする．もう少し詳しく云うと，R^1 が可附番箇の区間 $\{I_j\}$ に分割され，I_j の内部 I_j° において $\varphi'(\lambda)>0$，かつ適当な regularity があるものとする．しかしここでは簡単のため，R^1 全体で

$$(2.14)\qquad \varphi'(\lambda)>0$$

を仮定する．

(2.9) を確かめるためには $e^{-itH_1}u$, $e^{-is\varphi(H_1)}u$ を計算しておく必要がある．§1 の結果を使ってこれらを求めておこう．$\Sigma A_j(\sigma\omega_j)$ の固有値 $\sigma\lambda_k(\omega)$ に属する固有 vector $r_k(\omega)$ への $\hat{u}(\sigma\omega)$ の成分を $\hat{u}_k(\sigma\omega)$ と書けば

$$(2.15)\qquad (H_1 u)^{\wedge}_k(\sigma\omega) = -\sigma\lambda_k(\omega)\hat{u}_k(\sigma\omega).$$

これより

$$(2.16)\qquad (e^{-itH_1}u)^{\wedge}_k(\sigma\omega) = e^{it\sigma\lambda_k(\omega)}\hat{u}_k(\sigma\omega),$$

$$(2.17)\qquad (e^{-is\varphi(H_1)}u)^{\wedge}_k(\sigma\omega) = e^{is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))}\hat{u}_k(\sigma\omega).$$

故に

$$(2.18)\qquad e^{-itH_1}e^{-is\varphi(H_1)}u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty e^{i\sigma\omega\cdot x}e^{it\sigma\lambda_k(\omega)+is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))}\times \hat{u}_k(\sigma\omega)\Gamma_k(\omega)\sigma^{n-1}\,d\sigma\, d\omega.$$

この形からわかるように(2.9)を調べるのには，各 Γ_k-成分について実行すればよい．(2.18)では σ の範囲が $0<\sigma<\infty$ であるから，k は 1 から m までを動く．更に u は H_1 の絶対連続部分空間に入っているとしてよいから，$k=p+1,\cdots,m-p$ については考えなくてよい．そこで考える式は

$$(2.19)\qquad (H_2J-JH_1)v(x) = i(E(x)-I)\sum A_j\partial_j v(x)$$

であるから

$$(2.20)\qquad \int_0^\infty\Big[\int\|E(x)-I\|^2\Big\|\sum_{j=1}^n A_j\iint\sigma\omega_j\, e^{i\sigma\omega\cdot x}e^{it\sigma\lambda_k(\omega)+is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))}\times \Gamma_k(\omega)\hat{u}_k(\sigma\omega)\sigma^{n-1}d\sigma\, d\omega\Big\|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}dt$$

となる.

先に述べた例としては $\hat{u}_k(\sigma\omega)$ が $u(\sigma)\cdot v(\omega)$ の形で $u(\sigma)$ がなめらかでその support が $(0,\infty)$ に含まれるようなものをとる. (2.20) に現われる σ に関する積分を考えよう:

$$(2.21)\quad \int_\alpha^\beta d\sigma \quad e^{i\sigma\omega\cdot x} e^{it\sigma\lambda_k(\omega)+is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))} u(\sigma)\sigma^{n-1}d\sigma.$$

ただし $0<\alpha<\beta<\infty$ で, (α,β) は $u(\sigma)$ の support を含むものとする. 部分積分によつて

$$(2.22)\quad (2.21)=\int_\alpha^\beta \frac{d}{d\sigma}\left\{e^{it\sigma\lambda_k(\omega)+is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))}\right\}\frac{e^{i\sigma\omega\cdot x}u(\sigma)\sigma^n d\sigma}{i(t\lambda_k(\omega)+s\varphi'(\sigma\lambda_k(\omega))\lambda_k(\omega))}$$

$$=\omega\cdot x\int_\alpha^\beta\{\qquad\}\frac{e^{i\sigma\omega\cdot x}u(\sigma)\sigma^n}{i(\qquad)}d\sigma+i\int_\alpha^\beta\frac{\{\qquad\}}{(\qquad)}e^{i\sigma\omega\cdot x}\partial/\partial\sigma(u(\sigma)\sigma^n)d\sigma$$

$$-i\int_\alpha^\beta\frac{\{\qquad\}e^{i\sigma\omega\cdot x}u(\sigma)\sigma^n}{(\qquad)^2}s\lambda_k(\omega)\varphi''(\sigma\lambda_k(\omega))\,d\sigma,$$

$$\{\qquad\}=e^{it\sigma\lambda_k(\omega)+is\varphi(\sigma\lambda_k(\omega))}$$

$$(\qquad)=t\lambda_k(\omega)+s\varphi'(\sigma\lambda_k(\omega)\ )\lambda_k(\omega).$$

もう一度部分積分を行うことによつて

$$(2.23)\quad |(2.21)|\leq\frac{\mathrm{const}\,(1+|x|^2)}{(t+\gamma s)^2}+\frac{\mathrm{const}\,(1+|x|)}{(t+\gamma s)^3}s+\frac{\mathrm{const}\,s^2}{(t+\gamma s)^4}$$

を得る. γ はある正定数. 分子に現われる const は ω, x によらない. (2.23) を用いれば, (2.20) の integrand $[\quad]^{\frac{1}{2}}$ は

(2.2) を考慮して

$$(2.24)\qquad [\quad]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\text{const}}{(t+\gamma s)^2} + \frac{\text{const}}{(t+\gamma s)^3}s + \frac{\text{const}}{(t+\gamma s)^4}s^2$$

と評価される。故に

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+\gamma s)^2} = \int_{\gamma s}^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\gamma s},$$

$$(2.25)\qquad \int_0^\infty \frac{s}{(t+\gamma s)^3}dt = s\int_{\gamma s}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2\gamma^2 s},$$

$$\int_0^\infty \frac{s^2}{(t+\gamma s)^4}dt = s^2\int_{\gamma s}\frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3\gamma^3 s}$$

を見れば (2.9) が得られることがわかる。

以上の計算は極めて rough なので，条件 (2.2) はもっと改良される余地があると思われる。Wilcox [ ] は $E(x)-I = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ なる仮定の下に wave operator の存在を証明している。

我々の得た wave operator $\mathbb{W}$ が isometric であることも証明できるがここには述べない。このことは J と同等な unitary identification operator J_ε — (2.5) — が存在することからもいえる（Kato [4] 参照。ただし [4] においては Wilcox の定義した uniformly propagative system を考えているので，我々の場合には新たに証明しなおす必要がある）。

§3. Wave operator の完全性について

§2ではWの存在と不変性について述べたが，このことから出てくるH_1とH_2とのspectral similarityについては何も述べなかった．これについてはKato [ ]の一般論を参照していただきたい．H_1とH_2とのspectral theory的な比較をする場合にはWの存在だけでは不十分であって，更にWの完全性というものが要求される．我々の場合，Wの存在がimplyするものとして，次の事実がある：Wの値域は$P_2\mathfrak{H}_2$，すなわち，H_2の絶対連続部分空間に含まれる．これが$P_2\mathfrak{H}_2$と一致する場合にWは完全であるという．

さてWの完全性についてであるが，H_1のnon-trivialなnull spaceがある場合，すなわちstatic fieldsが存在する場合 — 例えばMaxwell方程式 — には，まだ完全性はわかっていない。H_1がnon-static uniformly propagativeならば，Birman [ ]の結果を用いることによって完全性が示される．その際，identificationとしては(2.5)を用いて，問題をsingle-space problemに帰着させるのである．

Birmanの結果とは，H_1, H_2がHilbert spaceのself-adjoint operatorsで，$\mathcal{D}(H_1)=\mathcal{D}(H_2)$，$R_2(z)^k(H_2-H_1)R_1(z)^l \in$ trace class ($k, l \geqq 0$, $k+l>0$)ならば，$W(H_2, H_1)$が存在して完全である，ということである．ただし$R_j(z)=(H_j-z)^{-1}$でzはH_1, H_2

の *resolvent sets* の共通部分に入っているものとする。この Birman の結果を使うことは，浅野潔氏の注意による（完全性は Kato の本 [6] に出ている結果 —— $R_2(z)^k - R_1(z)^k \in$ *trace class* ならば $\mathbb{W}$ は存在して完全 —— を用いても示すことができるが，$E(x)$ に対するより強い *regularity* が要求される）.

$\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{H}_2$ が異る *space* である場合の *wave operator* の完全性に関する *abstract criterion* はまだ知られていないようである。

文　献

[1] Wilcox, C.: Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics. Arch. Ratl. Mech. Anal. 22 (1966), 37－78.

[2] Lax, P. D. & R. S. Phillips: "Scattering theory". Academic Press, New York 1967.

[3] Schmidt, G.: Spectral and scattering theory for Maxwell's equations. Arch. Ratl. Mech. Anal. 28 (1968), 284－322.

[4] Kato, T.: Scattering theory with two Hilbert spaces. J. Funct. Anal. 1 (1967), 342－369.

81

[5] Birman, M. Sh.: Local criterion for the existence of wave operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR 159 (1964), 485–488. (Russian).

[6] Kato, T.: "Perturbation theory for linear operators" Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.