数理解析研究所講究録
59巻 1968年 54-67

二階楕円型偏微分方程式の境界値問題

広大理　前田文之

はじめに．

二階式はより高階の楕円型偏微分方程式の境界値問題を論ずるのに，いわゆるSobolev空間を考えて，Hilbert空間の理論を用いるのが一つの標準的な方法になっている。しかしこの方法では，考える問題が具体的な問題と結びつくのは領域が有界の場合に限ることが多い。又Dirichlet問題以外の境界値問題では境界が滑らかな場合しか考えない。我々は領域が有界でなく，境界も滑らかでない場合を含める意味で一般の微分可能多様体上で二階の楕円型偏微分方程式の境界値問題を取扱う．方程式の係数も出来るだけ一般にして連続性は仮定しない。ユークリッド空間の（有界）領域上では，Stampacchia [8] 等が非連続な係数のものを扱っており，解の定義等はそれによる．

非有界領域に対しては Sobolev空間では狭すぎるので，

Deny-Lions [2] による Beppo Levi 型空間に相当するものを考えるが，問題の設定の形式は Sobolev 空間上で Lions [4] 等が考えたのと同様で，Hilbert 空間論，特に Lax-Milgram の定理が使える形に作る．我々は始めに境界そのものを与えないで境界値問題を設定するが，これが具体的に意味をもつことを示すために，位相的に仮想境界を作りその上で境界条件を与えたものが特別な例になっていることを示す（[5],[6] の拡張）．更に我々の方法で，Sario の normal operator（[7]）を一般化した operator が得られることを一つの応用として示す．

§1. 計量テンソルと，それによって定まる函数空間．

考える空間 Ω はコンパクトでない連結な C^1-多様体で，次元 $d \geq 2$ とする．Ω 上に次の条件をみたす対称な共変テンソル (g_{ij}) を与える：

(i) 各座標近傍[1] U において各 g_{ij} は有界可測，

(ii) 各座標近傍 U において (g_{ij}) は一様に正定値，即ちある $\lambda > 0$ があって，すべての $x \in U$ 及びすべての実数の組 $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ に対し

$$\lambda \sum \xi_i^2 \leq \sum g_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j$$

が成立つ．

任意の座標近傍 U において，G を (g_{ij}) の行列式とすると $dV=\sqrt{G}\,dx_1\cdots dx_d$ が U 上の測度として定まる。従って dV は Ω 全体で定義された測度とみなせる．

(g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列として，$f\in C^1(\Omega)$ に対し $|\mathrm{grad} f|^2 = \sum g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ は Ω 上の非負函数である．

$$C^1_D(\Omega)=\left\{f\in C^1(\Omega)\ ;\ D[f]\equiv\int_\Omega |\mathrm{grad} f|^2\,dV<\infty\right\}$$

とおく．Ω 内に一つの座標近傍 U_0 を固定し，$f\in C^1_D(\Omega)$ に対し

(1) $$\|f\|^2 = D[f]+\int_{U_0} f^2\,dV$$

と定義すると，$\|f\|$ は $C^1_D(\Omega)$ 上のノルムになる．このノルムによる $C^1_D(\Omega)$ の完備化を $\mathcal{D}(\Omega)$ と記そう．

局所的によく知られた結果（例えば [2] 参照）から，$\mathcal{D}(\Omega)$ の元 f は $L^2_{loc}(dV)$ の函数と同一視することが出来，しかも $|\mathrm{grad} f|$ が $L^2(dV)$ の函数として定まって，(1) が成立つ．更に $f, g\in\mathcal{D}(\Omega)$ ならば

$$D[f,g]=\int_\Omega \sum g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dV$$

が定義出来て，$\mathcal{D}(\Omega)$ は内積 $D[f,g]+\int_{U_0} fg\,dV$ によって Hilbert 空間をなす．

次に $C_0^1(\Omega)$ を台がコンパクトな $C^1(\Omega)$ の函数の全体とすると $C_0^1(\Omega) \subset C_D^1(\Omega)$ である。この $\mathcal{D}(\Omega)$ 内の閉包を $\mathcal{D}_0(\Omega)$ と記す。$\mathcal{D}_0(\Omega)$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の部分空間として Hilbert 空間をなす。もし $1 \notin \mathcal{D}_0(\Omega)$ ならば $\mathcal{D}_0(\Omega)$ 上ではノルム $\|f\|$ と $\sqrt{D[f]}$ とは同値である。このとき Ω は (g_{ij}) に関して正の境界をもつ[2]と呼ぼう。

§2. 方程式の解.

以下 Ω と (g_{ij}) は固定して，Ω は (g_{ij}) に関して正の境界をもつものと仮定する。

今 $a=(a^i)$ 及び $b=(b^i)$ を二つの反変ベクトルで，各座標近傍上で有界可測であるとし，q を Ω 上非負な函数で局所的に有界可測とする。形式的に次の方程式を考える：

$$Lu = \Delta u - \sum a^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{G}\, b^j u) - qu = 0,$$

ただし

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i \sqrt{G}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

このように与えられた L （或は a, b, q ）に対し

$$\mathcal{D}_L(\Omega)\left(\equiv \mathcal{D}_{(a,b,q)}(\Omega)\right) = \left\{ f \in \mathcal{D}(\Omega);\ \int_\Omega (|a|^2+|b|^2+q) f^2\, dV < \infty \right\}$$

とおく．こゝに $|a|^2=\sum g_{ij}a^ia^j$，$|b|^2=\sum g_{ij}b^ib^j$.

$|a|=|b|=q=0$ (a.e.) のときは $\mathcal{D}_L(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega)$ である．このときは $\|f\|_L=\|f\|$ とする．

$|a|+|b|+q\neq 0$ (a.e.) のとき，$\mathcal{D}_L(\Omega)$ のノルム $\|f\|_L$ を

$$\|f\|_L^2 = D[f]+\int_\Omega(|a|^2+|b|^2+q)f^2dV$$

で定義する．$\mathcal{D}_L(\Omega)$ は明らかに Hilbert 空間をなす．$\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ を $C_0^1(\Omega)$ の $\mathcal{D}_L(\Omega)$ における閉包とする．明らかに $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)\subset\mathcal{D}_0(\Omega)$.

次に $\mathcal{D}_L(\Omega)$ 上に L（或は a,b,q）によって定まる次の双一次形式を考える：

$$A_L[f,g]\ (=A_{(a,b,q)}[f,g])$$
$$=D[f,g]+\int_\Omega\left(\sum a^i\frac{\partial f}{\partial x_i}g+\sum b^j\frac{\partial g}{\partial x_j}f+qfg\right)dV.$$

$A_L[f,g]$ は $\mathcal{D}_L(\Omega)\times\mathcal{D}_L(\Omega)$ 上連続である．

$u\in\mathcal{D}_L(\Omega)$ があって，すべての $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ に対し $A_L[u,\varphi]=0$ をみたすとき，u を $Lu=0$ の解という。$Lu=0$ の解の全体を $\mathcal{H}_L(\Omega)$ で表わす．（$\Delta u=0$ の解の全体は単に $\mathcal{H}(\Omega)$ と記す．）

（注）解の定義は局所的に定義するのが普通であろう．§5 参照．

§3 Dirichlet 問題

$\mathcal{D}(\Omega)$ に属する二つの函数 f_1, f_2 が"同じ境界値をもつ"とは, $f_1 - f_2 \in \mathcal{D}_0(\Omega)$ なることで定義する. Dirichlet 問題は, "与えられた $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対し, f と同じ境界値をもつ $Lu = 0$ の解を求めること" とする. もう少し制限して, 我々は $f_0 \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ を与えて

問題 $[D_L(f_0)]$: $f_0 - u \in \mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ なる $u \in \mathcal{H}_L(\Omega)$ を求めること.

を考える. Lax-Milgram の定理を適用すれば, 次の定理が得られる.

定理 1. $A_L[f, g]$ が $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ 上で coercive, 即ちある $\alpha > 0$ があって, すべての $\varphi \in \mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ に対し

$$A_L[\varphi, \varphi] \geq \alpha \|\varphi\|_L^2$$

をみたす, ならば, 問題 $[D_L(f_0)]$ は常に一つたゞ一つの解をもつ.

(注) $a = b = 0$ ならば $A_L[f, g]$ は $\mathcal{D}_L(\Omega)$ 上で coercive である. Lions [4] や Stampacchia [8] 等とは考えているノルムが違うことに注意.

§4 一般の境界値問題

一般的な境界条件は次の条件をみたす $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ と $B[\,,\,]$ とで与える：

(a) $\mathcal{R}$ は $\mathcal{H}_L(\Omega)$ の閉部分空間.

(b) $\mathcal{R}'$ は $\mathcal{H}_L(\Omega)$ の部分空間で, $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$.

(c) $B[u,v]$ は $\mathcal{R}' \times \mathcal{R}$ 上で定義された双一次形式で, $u \in \mathcal{R}'$ と固定すると v について $\mathcal{R}$ 上連続, $v \in \mathcal{R}$ と固定すると u について $\mathcal{R}$ 上（$\mathcal{R}'$ 上でなくてよい）連続.

更に $u_0 \in \mathcal{R}'$ と $\mathcal{R}$ 上連続な一次形式 l_0 とを与えて，境界値問題を次の形に設定する：

問題$[B_L(\mathcal{R}, B; u_0, l_0)]$ ：次の (i), (ii) をみたす $w \in \mathcal{H}_L(\Omega)$ を求めること：

(i) $w - u_0 \in \mathcal{R}$

(ii) すべての $v \in \mathcal{R}$ に対し

$$A_L[w, v] + B[w, v] = l_0(v) .$$

この問題の解の存在定理を述べるために次の定義をする：ある $\alpha' > 0$ があって，すべての $u \in \mathcal{R}$ に対し

$$A_L[u,u] + B[u,u] \geq \begin{cases} \alpha' \|u\|_L^2 & (|a|+|b|+c \neq 0 \text{ a.e.}) \\ \alpha' D[u] & (|a|=|b|=c=0 \text{ a.e.}) \end{cases}$$

をみたすとき，$(\mathcal{R}, B)$ は（L に対して）coercive である

と呼ぼう．

<u>定理</u> 2．$A_L[f,g]$ が $\mathcal{R}$ 上 coercive で $(\mathcal{R}, B)$ が L に対して coercive であると仮定する．

(i) $|a|+|b|+q \not\equiv 0$ (a.e.) か，$|a|=|b|=q=0$ (a.e.) の場合は $1 \notin \mathcal{R}$ か $1 \in \mathcal{R}$ で $B[1,1]>0$ であるならば，問題 $[B_L(\mathcal{R}, B; u_0, l_0)]$ は一つ，たゞ一つの解をもつ．

(ii) $|a|=|b|=q=0$ (a.e.)，$1 \in \mathcal{R}$ で，すべての $u \in \mathcal{R}$ に対し $B[u,1]=0$ のときは，問題 $[B_L(\mathcal{R}, B; u_0, l_0)]$ が解をもつための必要且十分な条件は $l_0(1) = B[u_0, 1]$ なることであり，このとき解は定数の差を除いて一意的に定まる．

この定理の証明も，Lax-Milgram の定理による．

(注) 上の問題では，$u_0 \in \mathcal{R}'$ としたが，$A_L[f,g]$ が $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ 上 coercive のときは，$f \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ で $[D_L(f)]$ の解 u_f が $\mathcal{R}'$ に属するようなものを与えて，(i) の条件を $w - u_f \in \mathcal{R}$ で置きかえてもよい。

<u>§5 仮想境界を与えた場合の Dirichlet 問題.</u>

ω を Ω 内の任意の領域とし，

$$H(\omega) = \left\{ u \in C(\omega) ;\ \begin{array}{l} \omega \text{ 内の任意の相対コンパクトな} \\ \text{領域 } \omega' \text{ に対し，} u \in \mathcal{H}(\omega') \end{array} \right\}$$

とおくと，$\{H(\omega)\}_\omega$ は Ω 上に M. Brelot の意味の調和構造（[1]）を定義する（Hervé [3] 参照）．この調和構造は，テンソル (g_{ij}) によって定まるものである．我々は (g_{ij}) を固定して考えているので，$H(\omega)$ の元を単に ω 上の調和函数と呼び，$\{H(\omega)\}$ から定まる ω 上の優調和函数も単に ω 上の優調和函数と呼ぶことにする．

今 Ω^* を Ω の一つのコンパクト化とする．仮想境界 $\Gamma = \Omega^* - \Omega$ 上に函数 φ を与えて，Perron-Brelot の方法で Dirichlet 問題を論ずることが出来る（[1]，[5]，[6] 参照）．即ち，

$$\overline{H}_\varphi = \inf\left\{ u\ ;\ \begin{array}{l} \Omega \text{ 上優調和，下から有界} \\ \underline{\lim}_{x\to\xi}\, u(x) \geq \varphi(\xi) \quad \forall \xi\in\Gamma \end{array} \right\},$$

$\underline{H}_\varphi = -\overline{H}_{-\varphi}$ と定義し，$\overline{H}_\varphi = \underline{H}_\varphi$ でこれが有限のとき φ は可解であるといい，共通の函数を H_φ と記す．このとき $H_\varphi \in H(\Omega)$ で，これが境界値 φ に対する $\Delta u = 0$ の解である．Γ 上の任意の連続函数が可解のとき，コンパクト化 Ω^* は可解であるという．Ω^* が可解なコンパクト化のときは，一点 $x_0 \in \Omega$ を固定して $\int \varphi\, d\omega = H_\varphi(x_0)$ $(\forall \varphi \in C(\Gamma))$ をみたす Γ 上の正測度 ω が存在する．これを調和測度と呼ぶ．

一般の方程式 $Lu = 0$ に対しては，可解なコンパクト化

Ω^* に対し

$$\mathcal{R}_L(\Gamma) = \{\varphi;\ \Gamma \text{上の可解な函数で},\ H_\varphi \in \mathcal{D}_L(\Omega)\}$$

とおく．$A_L[f, g]$ が $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ 上 coercive ならば，$\varphi \in \mathcal{R}_L(\Gamma)$ に対し，問題［$D_L(H_\varphi)$］は解をもつ．これを H_φ^L で表わす．これが境界値 φ に対する $Lu=0$ の Dirichlet 問題の解である．

（注）$Lu=0$ の解に対しても，直接 Perron-Brelot の方法で Dirichlet 問題を論ずることも可能であろう．

§6 仮想境界を与えた場合の第二，第三境界値問題

Ω^* を Ω の可解なコンパクト化とし，$A_L[f, g]$ は $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ 上 coercive であると仮定する．前節より $\varphi \in \mathcal{R}_L(\Gamma)$ に対し $H_\varphi^L \in \mathcal{H}_L(\Omega)$ が対応する．$\mathcal{H}_L(\Gamma) = \{H_\varphi^L;\ \varphi \in \mathcal{R}_L(\Gamma)\}$ とおけば $\mathcal{H}_L(\Gamma)$ は $\mathcal{H}_L(\Omega)$ の部分空間である．

今，$\hat{\mathcal{R}}$ を $\mathcal{R}_L(\Gamma)$ の部分空間で，$\hat{\mathcal{H}} = \{H_\varphi^L;\ \varphi \in \hat{\mathcal{R}}\}$ が $\mathcal{H}_L(\Omega)$ の閉部分空間であるものを考えよう．例えば調和測度 ω に対して可測な Γ の部分集合 Λ をとり

$$\mathcal{R}_L(\Lambda) = \{\varphi \in \mathcal{R}_L(\Gamma);\ \Gamma - \Lambda \text{上}\ \varphi = 0\ \omega\text{-a.e.}\}$$

とおけば，$\mathcal{D}_{L,0}(\Omega) = \mathcal{D}_0(\Omega)$ の仮定の下で，$\mathcal{H}_L(\Lambda) = \{H_\varphi^L;$

$\varphi\in\mathcal{R}_L(\Lambda)\}$ は $\mathcal{H}_L(\Omega)$ の閉部分空間になることが分る([5], [6]参照).

次に, Γ 上 ω-可測な非負函数 β で, $H_\varphi^L\to\int\beta\varphi^2d\omega$ が $\hat{\mathcal{H}}$ 上連続なものをとる([6]参照). それに対し, $\hat{\mathcal{R}}_1=\{\varphi\in\mathcal{R}_L(\Gamma);\int\beta\varphi^2d\omega<\infty\}$, $\hat{\mathcal{H}}_1=\{H_\varphi^L;\varphi\in\hat{\mathcal{R}}_1\}$ とおいて $H_\varphi^L\in\hat{\mathcal{H}}_1$, $H_\psi^L\in\hat{\mathcal{H}}$ に対し

$$B_\beta[H_\varphi^L,H_\psi^L]=\int\beta\varphi\psi\,d\omega$$

と定義する. もし $A_L[f,g]$ が $\hat{\mathcal{H}}$ 上 coercive ならば, $(\hat{\mathcal{H}},B_\beta)$ も coercive である。従って, 更に $\psi_0\in\hat{\mathcal{R}}_1$ と Γ 上の ω-可測な函数 γ_0 で, $l_{\gamma_0}(H_\varphi^L)=-\int\varphi\gamma\,d\omega$ が $\hat{\mathcal{H}}$ 上連続なものを与えるとき, 問題$[B_L(\hat{\mathcal{H}},B_\beta,H^L_{\psi_0},l_{\gamma_0})]$ に定理2が適用出来る.

特に $\hat{\mathcal{R}}=\mathcal{R}_L(\Lambda)$ の場合は, β,γ は Λ 上の函数でよく, 問題 $[B_L(\mathcal{H}_L(\Lambda),B_\beta,H^L_{\psi_0},l_{\gamma_0})]$ の解 u は次の二つの条件1), 2)で定まる:

1) $\Gamma-\Lambda$ 上 $\varphi_0=\psi_0$ ω-a.e. なる $\varphi_0\in\mathcal{R}_L(\Gamma)$ があって $u=H^L_{\varphi_0}$.

2) 任意の $\varphi\in\mathcal{R}_L(\Lambda)$ に対し

$$A_L[u,H_\varphi^L]+\int_\Lambda\beta\psi_0\varphi\,d\omega=-\int_\Lambda\varphi\gamma\,d\omega.$$

1) は u が $\Gamma-\Lambda$ 上で与えられた境界値 φ_0 をとることを意味し， 2) を変形すると，形式的に

$$\int(\Delta u)H\varphi\,dV+D[u,H\varphi]=-\int_\Lambda(\beta\varphi_0+\gamma)\varphi\,d\omega$$

となって， u が Λ 上で "normal derivative" $\beta\varphi_0+\gamma$ をもつことを意味する（[5], [6] 参照）。即ちこの問題は，仮想境界に対する第三境界値問題（$\Lambda=\Gamma$, $\beta\equiv 0$ のときは，Neumann 問題）とみなすことが出来る．

§7 $(\mathcal{R},B)$ による境界挙動．

この節では $A_L[f,g]$ は $\mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ 上 coercive であると仮定する． Ω 内のコンパクト集合 K で $\Omega-K$ が領域であるものをとり，$\{f\in C_D^1(\Omega);\ f$ は K の近傍で 0, $\|f\|_L<\infty\}$ の $\mathcal{D}_L(\Omega)$ における閉包を $\mathcal{D}_L^K$ と記す． $1\in\mathcal{D}_L^K$ ならば，K は negligible[3] という．以下 K は negligible ではないと仮定する．境界条件 $(\mathcal{R},\mathcal{R}',B)$ が §4 におけるように与えられたとき

$$\mathcal{R}^K=\{u\in\mathcal{H}(\Omega-K);\ {}^\exists u^*\in\mathcal{D}_L^K \text{ s.t. } u^*=v+g,\ v\in\mathcal{R},\ g\in\mathcal{D}_{L,0}\}$$

$$\mathcal{R}_1^K=\{u\in\mathcal{H}(\Omega-K);\ {}^\exists v\in\mathcal{R}',\ g\in\mathcal{D}_{L,0} \text{ s.t. } u=v+g \text{ on } \Omega-K\}$$

とおき， $u_1\in\mathcal{R}_1^K$， $u_2\in\mathcal{R}^K$ が与えられたとき， $u_i=v_i+g_i$

$(i=1,2)$, $v_1 \in \mathcal{R}'$, $v_2 \in \mathcal{R}$, $g_i \in \mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ $(i=1,2)$, と書けるものとして

$$B^K[u_1, u_2] = B[v_1, v_2]$$

と定義すると, $\Omega-K$ における境界条件 $(\mathcal{R}^K, \mathcal{R}_1^K, B^K)$ が定まる.

次に任意の $f \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ に対し, $f-g \in \mathcal{D}_L^K$, $g|_{\Omega-K} \in \mathcal{H}(\Omega-K)$ なる $g \in \mathcal{D}_{L,0}(\Omega)$ が一意的に定まる（定理1）。$h_f^K = g|\Omega-K$ は $\mathcal{R}_1^K$ に属すから, $\Omega-K$ において, 問題 $[B_L(\mathcal{R}^K, B^K, h_f^K, 0)]$ を考えることが出来る. 定理2 により この解が存在すれば一意的に定まる. それを $B_L^K f$ と記そう. $B_L^K f$ は K の境界で f という値をとり, 仮想境界で境界条件 $(\mathcal{R}, B)$ によって定まる挙動をとる $Lu=0$ の $\Omega-K$ 上の解ということになる. 対応 $f \to B_L^K f$ によって, Sario の normal operator を一般化したものが得られる（[7] 参照）. この operator B_L^K に対する主函数[4] を求める問題も論ずることが出来るが, こゝでは省略する.

[傍注] 1) 座標近傍は相対コンパクトなもののみ考える.

2) of positive boundary. Riemann 面の hyperbolic に相当する。

3) 容量 (capacity) ゼロに相当する.

4) principal function ; [7] 参照。

引 用 文 献

[1] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques, Université de Montréal, 1966.

[2] J. Deny and J.L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier 5(1955), 305-370.

[3] R.-M. Hervé, Un principe du maximum pour les sous-solutions localles d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, Ann. Inst. Fourier 14-2(1964), 493-508.

[4] J. Lions, Problèmes aux limites dans des équations aux dérivées partielles, Université de Montréal, 1967.

[5] F-Y. Maeda, Normal derivatives on an ideal boundary, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 28(1964), 113-131.

[6] F-Y. Maeda, Boundary value problems for the equation $\Delta u - qu = 0$ with respect to an ideal boundary, Ibid., 32(1968), 85-146.

[7] B. Rodin and L. Sario, Principal functions, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[8] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier 15-1 (1965), 189-258.