数理解析研究所講究録
60巻 1968年 105-119

Asymptotic Expansions of the Distributions of Some Statistics in Multivariate Analysis

広大 理　藤越康祝

1. Introduction

統計量, (i) the generalized variance in the non-central case, (ii) the likelihood ratio criterion for multivariate linear hypothesis, (iii) the Pillai's criterion for multivariate linear hypothesis, (iv) the likelihood ratio criterion for independence, (V) the trace of non-central Wishart matrix variate の分布の漸近展開を求める. いずれの場合にも, 各統計量の特性関数を展開し, それを反転する方法によつて求められる. matrix argument の hypergeometric function を用いて表示される特性関数の展開においては, 2節にかかげる zonal polynomials に関する公式が基本的である. なお, (ii)と(iv)は杉浦氏 (Univ. of North Carolina) との共同研究である (Sugiura and Fujikoshi [5]).

2. Some formulae on zonal polynomials

分割 $\kappa=(k_1, k_2, \cdots, k_p)$, $k=k_1+k_2+\cdots+k_p$, $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_p\geq 0$ に対応する symmetric matrix Z の zonal polynomial を $C_\kappa(Z)$ で表わす. 又,

$$a_1(\kappa)=\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha(k_\alpha-\alpha), \quad a_2(\kappa)=\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha(4k_\alpha^2-6\alpha k_\alpha+3\alpha^2)$$

$$(b)_\kappa=\prod_{\alpha=1}^{p}(b-(\alpha-1)/2)(b+1-(\alpha-1)/2)\cdots(b+k_\alpha-1-(\alpha-1)/2)$$

とおく.

Lemma 1. (Sugiura and Fujikoshi [5])

(1) $\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{(\kappa)} x^k C_\kappa(Z)/(k-r)! = (x\,\mathrm{tr}\,Z)^r\,\mathrm{etr}(xZ)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)} x^k C_\kappa(Z)a_1(\kappa)/k! = (x^2\,\mathrm{tr}\,Z^2)\,\mathrm{etr}(xZ)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(\kappa)} x^k C_\kappa(Z)a_1(\kappa)/(k-1)! = (2x^2\,\mathrm{tr}\,Z^2+x^3\,\mathrm{tr}\,Z^2\,\mathrm{tr}\,Z)\,\mathrm{etr}(xZ)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)} x^k C_\kappa(Z)a_1^2(\kappa)/k! = \{x^4(\mathrm{tr}\,Z^2)^2+4x^3\,\mathrm{tr}\,Z^3+x^2(\mathrm{tr}\,Z)^2+x^2\,\mathrm{tr}\,Z^2\}\,\mathrm{etr}(xZ)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)} x^k C_\kappa(Z)a_2(\kappa)/k! = \{4x^3\,\mathrm{tr}\,Z^3+3x^2(\mathrm{tr}\,Z)^2+3x^2\,\mathrm{tr}\,Z^2+x\,\mathrm{tr}\,Z\}\,\mathrm{etr}(xZ)$

Lemma 3. Zの実部は正定値行列で固有値の絶対値はすべて1より小さいとする. $U=Z(I-Z)^{-1}$ とおく.

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)/(k-1)! = b(\mathrm{tr}\,U)|I-Z|^{-b}$$

(2) $$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)/(k-2)! = b\left\{b(\mathrm{tr}\,U)^2+\mathrm{tr}\,U^2\right\}|I-Z|^{-b}$$

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)a_1(\kappa)/k! = \frac{b}{2}\left\{(\mathrm{tr}\,U)^2+(2b+1)\mathrm{tr}\,U^2\right\}|I-Z|^{-b}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)a_1(\kappa)/(k-1)! = \frac{b}{2}\Big\{b(\mathrm{tr}\,U)^3+(2b^2+b+2)\mathrm{tr}\,U^2\,\mathrm{tr}\,U$$
$$+2(2b+1)\mathrm{tr}\,U^3+2(\mathrm{tr}\,U)^2+2(2b+1)\mathrm{tr}\,U^2\Big\}|I-Z|^{-b}$$

(5) $$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)a_1^2(\kappa)/k! = \frac{b}{4}\Big\{b(\mathrm{tr}\,U)^4+2(2b^2+b+2)(\mathrm{tr}\,U)^2\mathrm{tr}\,U^2$$
$$+8(2b+1)\mathrm{tr}\,U\,\mathrm{tr}\,U^3+(2b+1)(2b^2+b+2)(\mathrm{tr}\,U^2)^2+2(8b^2+10b+5)\mathrm{tr}\,U^4$$
$$+4(\mathrm{tr}\,U)^3+12(2b+1)\mathrm{tr}\,U\,\mathrm{tr}\,U^2+8(2b^2+3b+2)\mathrm{tr}\,U^3+2(2b+1)(\mathrm{tr}\,U)^2$$
$$+2(2b+3)\mathrm{tr}\,U^2\Big\}|I-Z|^{-b}$$

(6) $$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(b)_\kappa C_\kappa(Z)a_2(\kappa)/k! = \frac{b}{6}\Big\{16(\mathrm{tr}\,U)^3+12(3b-1)\mathrm{tr}\,U\,\mathrm{tr}\,U^2$$
$$+4(6b^2+9b+11)\mathrm{tr}\,U^3+9(2b+1)(\mathrm{tr}\,U)^2+9(2b+3)\mathrm{tr}\,U^2+6\,\mathrm{tr}\,U\Big\}|I-Z|^{-b}$$

3. Expansion of the generalized variace in the non-central case

確率行列 X $(n\times p)$ の各行は互に独立で，同じ共分散行列 Σ なる p 次元正規分布に従い，かつ，$E[X]=M$ とする．分布を考えるかぎりにおいて，generalized variance は $S=(1/n)X'X$ の行列式で定義される．$|S|$ の漸近展開は non-centrality matrix $\Omega=\Sigma^{-\frac{1}{2}}M'M\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ の n に関する order に関係する．すでに昨年のシンポジウムにおいて報告しているので，ここでは，Ω が定数行列とみなしたときの漸近展開が Lemma 1 を用いることにより，さらに，高次の項まで求めることができることを注意する．結果は次のようになる．

Theorem 1. nS は non-central Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n, \Omega)$ に従うとする．Ω が定数行列と仮定すると，

$$\lambda=(\sqrt{n}/\sqrt{2p})\log(|S|/|\Sigma|)$$

は次のように展開される．

$$P(\lambda\le x)=\Phi(x)+\frac{1}{3\sqrt{2pn}}\left\{3\Phi'(x)(q-\mathrm{tr}\,\Omega)+\Phi^{(3)}(x)\right\}$$

$$+\frac{1}{36pn}\left\{9\Phi^{(2)}(x)\left[q(q+2)-2q\,\mathrm{tr}\,\Omega+(\mathrm{tr}\,\Omega)^2\right]+6\Phi^{(4)}(x)\left[q+1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{tr}\,\Omega\right]+\Phi^{(6)}(x)\right\}+\frac{1}{180\sqrt{2p}\,p\sqrt{n}\,n}\left\{15\Phi'(x)\left[p^2(2p^2+3p-1)\right.\right.$$

$$+6p\,\mathrm{tr}\,\Omega^2] + 15\,\Phi^{(3)}(x)\,[\,q(q+2)(q+4) - 3q(q+2)\,\mathrm{tr}\,\Omega \quad q(\mathrm{tr}\,\Omega)^2$$

$$-(\mathrm{tr}\,\Omega)^3] + 3\,\Phi^{(5)}(x)\,[\,5q^2 + 20q + 12 - 10(q+1)\,\mathrm{tr}\,\Omega + 5(\mathrm{tr}\,\Omega)^2\,]$$

$$+5\,\Phi^{(7)}(x)\,[\,q+2 - \mathrm{tr}\,\Omega\,] + (5/9)\,\Phi^{(9)}(x)\} + O(n^{-2}) \quad ,$$

ただし，$q = p(p+1)/2$，$\Phi^{(r)}(x)$ は標準正規分布関数 $\Phi(x)$ の r 回微分である．

なお，この節における詳細は Fujikoshi [3] を参照されたい．

4. Expansions of the test criteria for multivariate linear hypothesis

次のごとく標準化される多変量線型仮説問題を考える．

$Y'(p\times N) = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ の各列ベクトルは互に独立で，共分散行列 Σ なる p 次元正規分布に従うものとする．仮説検定

$$(4.1)\qquad \begin{array}{ll} H: & \begin{array}{ll} \mathcal{E}[y_i] = 0 & i = 1, 2, \cdots, b \\ \mathcal{E}[y_j] = 0 & j = s+1, \cdots, N \quad (\,b \le s\,) \end{array} \\ K: & \begin{array}{ll} \mathcal{E}[y_i] = 0 & \text{some } i \quad (\,1 \le i \le b\,) \\ \mathcal{E}[y_j] = 0 & j = s+1, \cdots, N \end{array} \end{array}$$

を考える．この検定の尤度比基準 λ，および，Pillai's criterion V はそれぞれ，

$$\lambda = \{ |S_e| / |S_e + S_h| \}^{\frac{N}{2}}$$

(4.2)

$$v = \mathrm{tr}\, S_h (S_e + S_h)^{-1}$$

で与えられる．ただし，$S_e = \sum_{\alpha=s+1}^{N} y_\alpha y_\alpha'$，$S_h = \sum_{\alpha=1}^{b} y_\alpha y_\alpha'$ ．対立仮説Kのもとで，S_e は $W_p(\Sigma, N-s)$，S_h は $W_p(\Sigma, b, \Omega)$ に従い，互に独立である．ただし，$\Omega = (\frac{1}{2})\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Gamma'\Gamma\Sigma^{-\frac{1}{2}}$，$\mathcal{E}[y_1, y_2, \cdots, y_b] = \Gamma'$ ．

まず，対立仮説Kのもとで，λの漸近展開を求める．$\rho N = N-s+(b-p-1)/2 = m$ とおく．Constantine [2] より，$-2\rho \log \lambda$ の特性関数は

$$C(t) = E[\, e^{-2it\rho \log \lambda}\,]$$

(4.3)

$$= \frac{\Gamma_p\left(\frac{m}{2}(1-2it) - \frac{b-p-1}{4}\right)\Gamma_p\left(\frac{m}{2} + \frac{b+p+1}{4}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{m}{2} - \frac{b-p-1}{4}\right)\Gamma_p\left(\frac{m}{2}(1-2it) + \frac{b+p+1}{4}\right)}\, {}_1F_1\left(-itm; \frac{m}{2}(1-2it) + \frac{b+p+1}{4}: -\Omega\right)$$

で与えられる．ただし，

$$\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{\alpha=1}^{p} \Gamma(x - (\alpha-1)/2)$$

$${}_1F_1(a; b: Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(\kappa)} \frac{(a)_\kappa}{(b)_\kappa} \cdot \frac{C_\kappa(Z)}{k!}$$

最初の4つの Γ-functions は仮説のもとでの特性関数になつている．従つて，よく知られた結果（例えば，Anderson [1], P. 208）から

$$(4.4)\quad C_1(t) = (1-2it)^{-bp/2}\Big\{ 1 + (1/48)m^{-2}bp(b^2+p^2-5)\big[(1-2it)^{-2}-1\big] + O(m^{-3})\Big\}$$

をうる．一方

$$(4.5)\quad C_2(t) = {}_1F_1(-itm\,;\ m(1-2it)/2+(b+p+1)/4\ :-\Omega)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)} (-itm)_{\kappa}\, C_{\kappa}(-\Omega)\Big/\big\{(m(1-2it)/2+(b+p+1)/4)_{\kappa}\, k!\big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)} \left(\frac{2it}{1-2it}\right)^{k} \frac{C_{\kappa}(\Omega)}{k!}\Bigg[1+\frac{1}{m}\left\{-\frac{(b+p+1)k}{2(1-2it)} - \frac{a_1(\kappa)}{(1-2it)2it}\right\}$$

$$+\frac{1}{m^2}\left\{\frac{(1-4it)k}{24(it)^2(1-2it)^2} + \frac{(b+p+1)^2}{8(1-2it)^2}k(k+1) + \frac{(b+p+1)a_1(\kappa)}{2(1-2it)^2}\left(1+\frac{k}{2it}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{(1-4it)a_2(\kappa)}{24(it)^2(1-2it)^2} + \frac{a_1^2(\kappa)}{8(it)^2(1-2it)^2}\right\} + O(m^{-3})\Bigg]$$

と展開され，Lemma 1 を用いることにより簡約化でき，$C(t)$ の展開が与えられる．反転することにより次の結果をうる．

Theorem 2．　線型仮説問題 (4.1) の尤度比基準は次のように展開される．

$$P(-2\rho\log\lambda < x) = P(\chi_f^2(\delta^2)<x) + \frac{1}{m}\Big\{\frac{b+p+1}{2}\mathrm{tr}\,\Omega\, P(\chi_{f+2}^2(\delta^2)<x)$$

$$-\Big(\frac{b+p+1}{2}\mathrm{tr}\,\Omega - \mathrm{tr}\,\Omega^2\Big)P(\chi_{f+4}^2(\delta^2)<x) - \mathrm{tr}\,\Omega^2\, P(\chi_{f+6}^2(\delta^2)<x)\Big\} + \frac{1}{m^2}\Big\{$$

$$\frac{bP(b^2+P^2-5)}{48}\left[P(\chi^2_{f+4}(\delta^2)<x)-P(\chi^2_f(\delta^2)<x)\right]+\sum_{r=2}^{6}g_{2r}(\Omega)$$

$$\cdot P(\chi^2_{f+2r}(\delta^2)<x)\Big\}+O(m^{-3}) .$$

ただし，$f=bP$，$\delta^2=\mathrm{tr}\,\Omega$，$\rho N=N-s+(b-P-1)/2=m$．$\chi^2_f(\delta^2)$ は non-centrality parameter δ^2 なる自由度 f の non-central chi-square variate.

$$g_4(\Omega)=-\frac{(b+P+1)^2}{4}\mathrm{tr}\,\Omega+\frac{b+P+1}{2}\mathrm{tr}\,\Omega^2+\frac{(b+P+1)^2}{8}(\mathrm{tr}\,\Omega)^2$$

$$g_6(\Omega)=\frac{(b+P+1)^2}{4}\mathrm{tr}\,\Omega-\{1+2(b+P+1)\}\mathrm{tr}\,\Omega^2-\left\{1+\frac{(b+P+1)^2}{4}\right\}(\mathrm{tr}\,\Omega)^2$$

$$+\frac{4}{3}\mathrm{tr}\,\Omega^3+\frac{b+P+1}{2}\mathrm{tr}\,\Omega^2\,\mathrm{tr}\,\Omega$$

$$g_8(\Omega)=\left\{1+\frac{3}{2}(b+P+1)\right\}\mathrm{tr}\,\Omega^2+\left\{1+\frac{(b+P+1)^2}{8}\right\}(\mathrm{tr}\,\Omega)^2-4\,\mathrm{tr}\,\Omega^3$$

$$-(b+P+1)\mathrm{tr}\,\Omega^2\,\mathrm{tr}\,\Omega+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\Omega^2)^2$$

$$g_{10}(\Omega)=\frac{8}{3}\mathrm{tr}\,\Omega^3+\frac{b+P+1}{2}\mathrm{tr}\,\Omega^2\,\mathrm{tr}\,\Omega-(\mathrm{tr}\,\Omega^2)^2$$

$$g_{12}(\Omega)=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\Omega^2)^2 .$$

次に，仮説Hのもとで U の漸近展開を考える．$\mathrm{tr}\,S_h(S_e+S_h)^{-1}=\mathrm{tr}\,(S_e+S_h)^{-\frac{1}{2}}S_h(S_e+S_h)^{-\frac{1}{2}}$ であり，$(S_e+S_h)^{-\frac{1}{2}}S_h(S_e+S_h)^{-\frac{1}{2}}$ は多変量Beta分布に従う．$N-S+b=m$ とおく．James [4] の結果より，$m\,\mathrm{tr}\,S_h(S_e+S_h)^{-1}$ の積率母関数 $\varphi(t)$ は次のように表わされる．

$$(4.6)\quad \varphi(t) = {}_1F_1\left(\frac{b}{2};\frac{m}{2}: tmI\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}\left(\frac{b}{2}\right)_\kappa \frac{C_\kappa(2tI)}{k!}\left\{1 - \frac{1}{m}a_1(\kappa) + \frac{1}{6m^2}\left(3a_1^2(\kappa) + a_2(\kappa) - k\right) + O(m^{-3})\right\}$$

Lemma 3 を用いることにより

$$= (1-2t)^{-bp/2}\left[1 - \frac{bp(b+p+1)}{4m}\left\{1-2(1-2t)^{-1}+(1-2t)^{-2}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{bp}{288m^2}\left\{d_0 - d_2(1-2t)^{-1} + d_4(1-2t)^{-2} - d_6(1-2t)^{-3} + d_8(1-2t)^{-4}\right\} + O(m^{-3})\right]$$

をうる．ただし，

$$(4.7)\quad \begin{aligned} d_0 &= 9bp^3 + 2(9b^2+9b-32)p^2 + 3(3b^3+6b^2-9b+28)p - 4(6b^2+9b+17) \\ d_2 &= 12\left\{3bp^3 + 2(3b^2+3b-5)p^2 + 3(b^3+2b^2+b+10)p - 20\right\} \\ d_4 &= 6\left\{9bp^3 + 2(9b^2+9b+2)p^2 + 3(3b^3+6b^2+19b+36)p + 8(3b^2+6b-2)\right\} \\ d_6 &= 4\left\{9bp^3 + 2(9b^2+9b+19)p^2 + 3(3b^3+6b^2+39b+46)p + 4(12b^2+27b+16)\right\} \\ d_8 &= 9\left\{bp^3 + 2(b^2+b+4)p^2 + (b+1)(b^2+b+20)p + 4(2b^2+5b+5)\right\} \end{aligned}$$

従って次の結果が成立する．

Theorem 3. 線型仮説問題 (4.1) における Pillai's criterion V は仮説 H のもとで次のように展開される．

111

$$P(m\,\mathrm{tr}\,S_h(S_e+S_h)^{-1}<x)=P(\chi_f^2<x)-\frac{bP(b+P+1)}{4m}\{P(\chi_f^2<x)$$

$$-2P(\chi_{f+2}^2<x)+P(\chi_{f+4}^2)\}+\frac{bP}{288m^2}\{\sum_{\alpha=0}^{4}d_{2\alpha}(-1)^{\alpha}P(\chi_{f+2\alpha}^2<x)\}+O(m^{-3}).$$

ただし　$m=N-S+b$，$f=bP$，d_0, d_2, d_4, d_6, d_8 は (4.7) で与えられる．

5. Expansion of the likelihood ratio criterion for independence

$X_\alpha\ (\alpha=1,2,\cdots,N)$ を $N_p(\mu,\Sigma)$ からの random sample とする．$A=\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\bar{X})(X_\alpha-\bar{X})'$，$\bar{X}=(1/N)\sum_{\alpha=1}^{N}X_\alpha$，$\Sigma$，A を次のように分割する．

$$\Sigma=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{c}p_1\\ p_2\end{array}\\ \begin{array}{cc}p_1 & p_2\end{array} & \end{array},\qquad A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{c}p_1\\ p_2\end{array}\\ \begin{array}{cc}p_1 & p_2\end{array} & \end{array}\qquad (p_1\le p_2).$$

仮説検定問題

$$(5.1)\qquad \begin{array}{ll} H: & \Sigma_{12}=0\\ K: & \Sigma_{12}\neq 0\end{array}$$

の尤度比検定基準は $\lambda=\{|A|/(|A_{11}||A_{22}|)\}^{N/2}$ で与えられる．$\rho N=N-(3/2)-(p_1+p_2)/2=m$ とおく．$-2\rho m^{-\frac{1}{2}}\{\log\lambda-\log(|\Sigma|/(|\Sigma_{11}||\Sigma_{22}|))^{\frac{N}{2}}\}$ の特性関数は

$$(5.2)\qquad C(t)=\frac{\Gamma_{p_1}(\frac{m}{2}-\sqrt{m}it+\frac{p_1-p_2+1}{4})\Gamma_{p_1}(\frac{m}{2}+\frac{p_1+p_2+1}{4})}{\Gamma_{p_1}(\frac{m}{2}+\frac{p_1-p_2+1}{4})\Gamma_{p_1}(\frac{m}{2}-\sqrt{m}it+\frac{p_1+p_2+1}{4})}$$

$$\cdot\ {}_2F_1(-\sqrt{m}it,-\sqrt{m}it;\frac{m}{2}-\sqrt{m}it+\frac{p_1+p_2+1}{4}:P)$$

で与えられる．ただし，$\mathbb{P}=\mathrm{diag}(\rho_1^2,\cdots,\rho_k^2)$ で ρ_j^2 は母集団正準相関，

$${}_2F_1(a_1,a_2;b;Z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}\frac{(a_1)_\kappa(a_2)_\kappa}{(b)_\kappa}\frac{C_\kappa(Z)}{k!}.$$

(5.3) First factor $=1+\frac{it}{\sqrt{m}}p_1p_2+\frac{1}{m}(it)^2\{p_1p_2+(p_1p_2)^2/2\}+O(m^{-\frac{3}{2}})$.

(5.4) ${}_2F_1(-\sqrt{m}it,-\sqrt{m}it;\frac{m}{2}-\sqrt{m}it+\frac{p_1+p_2+1}{4}:\mathbb{P})$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(\kappa)}(-2t^2)^k\frac{C_\kappa(\mathbb{P})}{k!}\Big[1+\frac{1}{\sqrt{m}}\{2itk-(it)^{-1}a_1(\kappa)\}+$$

$$\frac{1}{12m}\{[24(it)^2+(it)^{-2}-6(p_1+p_2+1)]k+24(it)^2k^2-12(2k+1)a_1(\kappa)$$

$$-(it)^{-2}a_2(\kappa)+6(it)^{-2}a_1^2(\kappa)\}+O(m^{-\frac{3}{2}})\Big]$$

これに，Lemma 1 を用いて簡約化した結果と (5.3) から，$C(t)$ の展開をうる．反転することにより次の結果をうる．

Theorem 4．仮説検定問題 (5.1) の尤度比基準は対立仮説Kのもとで次のように展開される．$m=\rho N=N-(3/2)-(p_1+p_2)/2$，$\hat{\lambda}=-(\sqrt{m}/\tau)\{\log|A|/(|A_{11}||A_{22}|)-\log|\Sigma|/(|\Sigma_{11}||\Sigma_{22}|)\}$，$\tau=2(\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく．このとき．

$$P(\hat{\lambda}<x)=\Phi(x)-\frac{1}{\sqrt{m}}\{(p_1p_2/\tau)\Phi'(x)+(4/\tau^3)\Phi^{(3)}(x)(\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2-$$

$$\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4)\}+\frac{1}{m}\{(p_1p_2/\tau^2)(1+p_1p_2/2)\Phi^{(2)}(x)+\sum_{\alpha=1}^{3}\Phi^{(2\alpha)}(x)l_{2\alpha}(\mathbb{P})/\tau^{2\alpha}\}+O(m^{-\frac{3}{2}}).$$

ただし,

$$\ell_2(\mathbb{P}) = \mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4 + (\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2)^2 - (p_1+p_2+1)\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2$$

$$\ell_4(\mathbb{P}) = 4p_1p_2(\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2 - \mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4) + 8\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2 - 20\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4 + (40/3)\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^6$$

$$\ell_6(\mathbb{P}) = 8(\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4)^2 + 8(\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2)^2 - 16\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^4\,\mathrm{tr}\,\mathbb{P}^2 .$$

6. Expansion of the trace of non-central Wishart matrix variate

3節における記号を用いる. $nS = X'X$ は non-central Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n, \Omega)$ に従う. このとき, $\mathrm{tr}\,S$ の漸近展開を考える. 結果は Ω の n に関する order に関係する. 一般に,

$$(6.1)\quad E[e^{it\,\mathrm{tr}\,X'X}] = |I - 2it\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{2}\Omega(I-2it\Sigma)^{-1}\right\}$$

が成立する. (6.1) をもとにして得られる特性関数を展開し, それを反転する方法により次の結果をうる.

Theorem 5.

(i) Ω が constant matrix と仮定する. $\lambda = (\sqrt{n}/\tau)\{\mathrm{tr}\,S - \mathrm{tr}\,\Sigma\}$, $\tau = \sqrt{2\,\mathrm{tr}\,\Sigma^2}$ とおく. このとき, λ は次のように展開される.

$$P(\lambda < x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\tau}\Phi'(x)\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma + \frac{4}{3\tau^3}\Phi^{(3)}(x)\right\} + \frac{1}{n}\left\{\right.$$

$$\frac{1}{2\tau^2}\Phi^{(2)}(x)\left[4\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma^2+(\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma^2)^2\right]+\frac{1}{3\tau^4}\Phi^{(4)}(x)\left[6\,\mathrm{tr}\,\Sigma^4+4\,\mathrm{tr}\,\Sigma^3\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma\right]$$

$$+\frac{8}{9\tau^6}\Phi^{(6)}(x)(\mathrm{tr}\,\Sigma^3)^2\Big\}-\frac{1}{\sqrt{n}\,n}\Big\{\frac{1}{6\tau^3}\Phi^{(3)}(x)\left[24\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma^3+12\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma^2\right.$$

$$\left.+(\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma)^3\right]+\frac{1}{30\tau^5}\Phi^{(5)}(x)\left[96\,\mathrm{tr}\,\Sigma^5+60\,\mathrm{tr}\,\Sigma^4\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma+20\,\mathrm{tr}\,\Sigma^3\left(4\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma)^2\right)\right]+\frac{8}{9\tau^7}\Phi^{(7)}(x)\left[3\,\mathrm{tr}\,\Sigma^3\,\mathrm{tr}\,\Sigma^4+(\mathrm{tr}\,\Sigma^3)^2\,\mathrm{tr}\,\Omega\Sigma\right]+\frac{32}{81\tau^9}\Phi^{(9)}(x)(\mathrm{tr}\,\Sigma^3)^3\Big\}+O(n^{-2}).$$

(ii) $\Omega=n\Theta$, Θ が constant matrix と仮定する．$\mu=(\sqrt{n}/\sigma)\cdot\{\mathrm{tr}\,S-\mathrm{tr}(I+\Theta)\Sigma\}$, $\sigma=\sqrt{2\,\mathrm{tr}(I+2\Theta)\Sigma^2}$ とおく．このとき，μ は次のように展開される．

$$P(\mu<x)=\Phi(x)-\frac{4}{3\sqrt{n}\,\sigma^3}\Phi^{(3)}(x)\,\mathrm{tr}(I+3\Theta)\Sigma^3+\frac{1}{n}\Big\{\frac{2}{\sigma^4}\Phi^{(4)}(x)$$

$$\cdot\,\mathrm{tr}(I+4\Theta)\Sigma^4+\frac{8}{9\sigma^6}\Phi^{(6)}(x)(\mathrm{tr}(I+3\Theta)\Sigma^3)^2\Big\}-\frac{1}{\sqrt{n}\,n}\Big\{\frac{16}{5\sigma^3}\Phi^{(5)}(x)$$

$$\cdot\,\mathrm{tr}(I+5\Theta)\Sigma^5+\frac{8}{3\sigma^7}\Phi^{(7)}(x)\,\mathrm{tr}(I+3\Theta)\Sigma^3\,\mathrm{tr}(I+4\Theta)\Sigma^4$$

$$+\frac{32}{81\sigma^9}\Phi^{(9)}(x)(\mathrm{tr}(I+3\Theta)\Sigma^3)^3\Big\}+O(n^{-2}).$$

参 考 文 献

[1] Anderson, T. W. (1958). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.

[2] Constantine, A. G. (1963). Some non-central distribution problem in multivariate analysis. Ann. Math. Statist. 34, 1270-1285.

[3] Fujikoshi, Y. (1968). Asymptotic expansion of the distribution of the generalized variance in the non-central case. J. Sci. Hiroshima Univ. Vol. 32, No. 2.

[4] James, A. T. (1964). Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples. Ann. Math. Statist. 35, 475-501.

[5] Sugiura, N. and Fujikoshi, Y. (1968). Asymptotic expansions of the power functions of the likelihood ratio tests for multivariate linear hypothesis and independence. Submitted to Ann. Math. Statist.

Table

Upper percentage points of Pillai's criterion

$$P(\operatorname{tr} S_h (S_e + S_h)^{-1} \leq x) = \alpha, \quad N - s = n$$

(I) $\alpha = 0.05$

P=2

n \ b	2	5	8	13
5	1.14671	1.56682	1.74837	1.89564
30	0.28414	0.49450	0.65036	0.84598
80	0.11372	0.21024	0.29053	0.40470
200	0.04664	0.08840	0.12491	0.17993

P=3

n \ b	3	5	8	13
5	1.78798	2.14233	2.44174	2.69358
30	0.48599	0.67476	0.90320	1.19431
80	0.19937	0.28698	0.40287	0.56964
200	0.08258	0.12069	0.17307	0.25286

(II) $\alpha = 0.01$

P=2

n \ b	2	5	8	13
5	1.35078	1.70780	1.86676	1.99241
30	0.37692	0.59226	0.74567	0.93369
80	0.15596	0.26081	0.34527	0.46250
200	0.06474	0.11113	0.15061	0.20902

P=3

n \ b	3	5	8	13
5	1.94528	2.28396	2.56675	2.80023
30	0.58912	0.78190	1.00961	1.29406
80	0.25019	0.34401	0.46546	0.63658
200	0.10493	0.14650	0.20263	0.28670

上記の結果は m^{-1} の項までの展開公式を用いたものである.