

Abstract harmonic function  
 と integral representation

早大 教育 和田 淳藏

§1. 序

function algebra の理論は、disk algebra すなわち複素平面の単位円の上で定義された複素値連続関数で、その内部に analytic に拡張出来るものの全体のなす環のもつ諸性質に負う所が多い。今 disk algebra を  $A_0$  としたとき、 $f \in A_0$  に対して  $f$  の実数部分  $\operatorname{Re} f$  は勿論単位閉円板で考之ると連続でかつ、単位開円板では harmonic function となっている。また  $\operatorname{Im} f$  でも同様なことがいえる。すなわち  $\operatorname{Re} f$  は continuous conjugate function をもつ harmonic function である。  $A$  を一般の compact Hausdorff 空間の上の function algebra としたとき、 $f \in A$  に対して  $\operatorname{Re} f$  は continuous conjugate をもつ harmonic function であると解釈出来る。  $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$  としたとき  $\operatorname{Re} A$  に関する研究が非常に多くなされているが、§2 においてそのうちの二、三のものに

関して考之。とくに Hoffman and Wermer の定理, Wermer の定理に関連した事柄について考之。つぎに最近 Bear, Gleason などによつて研究されてゐる compact Hausdorff 空間の開集合の上で定義された Abstract harmonic function についての理論, それに関する Abstract potential theory などについて述べる。これは function algebra というよりは, compact Hausdorff 空間の上の実数値連続関数からなる線型空間の上になされる。とくにその線型空間  $A$  の Šilov 境界を  $\Gamma$  としたとき  $\Delta = X \sim \Gamma$  が一つの part (function algebra における Gleason part を一般化したもの) になつてゐる場合に,  $\Delta$  に Brelot の axiomatic potential theory の convergence axiom と同等な条件を入れることにより,  $\Delta$  の上の Abstract harmonic function についての理論を發展さす。  $\Delta$  の上の harmonic function についての integral representation をも考察する。

## § 2. $\text{Re } A$ .

§ 1 で述べたように,  $A$  を compact Hausdorff 空間の上の function algebra としたとき,  $\text{Re } A$  は continuous conjugate をもつ harmonic function の全体と考之ることが出来る。この  $\text{Re } A$  について, つぎの二つの定理はよく知られてゐる。そしてどちらも Stone-Weierstrass の定理の拡張となつてい

る。

定理 (Hoffman and Wermer [17])。  $\text{Re } A$  が  $C(X)$  で closed ならば  $A = C(X)$ 。

定理 (Wermer [24])。  $\text{Re } A$  が ring をなせば  $A = C(X)$  となる。

この Wermer の定理はつぎのことを示している:  $A \neq C(X)$  のとき  $\text{Re } A$  に関数  $u$  が存在し、その二乗  $u^2$  は  $\text{Re } A$  に属さない。なんとすれば  $\text{Re } A$  の任意の関数  $u$  に対して  $u^2 \notin \text{Re } A$  とすれば、 $\text{Re } A \ni u, v$  に対して  $uv = \frac{1}{4}((u+v)^2 - (u-v)^2) \in \text{Re } A$  となるからである。

上の Hoffman and Wermer の定理は A. Browder [13] によって簡単な証明が与えられ、また最近 Arenson [1], Sidney and Stout [22] によってその拡張が考えられた。その Sidney and Stout の定理はつぎのようである。

定理 (Sidney and Stout)  $A$  を  $X$  の上の function algebra で、 $E$  を  $X$  の closed set とする。もし  $\text{Re } A|_E$  が  $C_{\mathbb{R}}(E)$  で closed ならば  $A|_E = C(E)$  となる。

この定理は、つぎの定理の系として証明される。

定理  $A$  を  $X$  の上の function algebra で、 $E$  を  $X$  の closed subset とする。もし  $\text{Re } A|_E = C_{\mathbb{R}}(E)$  ならば  $A|_E = C(E)$  となる。

この定理は Hoffman and Wermer の定理の拡張になつてゐることは明らかであるが、Wermer の定理の拡張にはなつていないことをつぎに例で示す。

(例)  $X$  を単位開円板とし、 $A \in X$  の上で連続で  $X$  の内点で analytic な複素値関数全体のなす function algebra とする。いま  $E = [-1, 1]$  とおく。ここで  $\text{Re } A|_E$  は ring をなしていることを示す。なんとなれば  $\text{Re } A|_E$  は symmetric である:  $f \in A$  で  $\|f - \sum a_i z^i\| \rightarrow 0$  としたとき  $\|g - \sum \bar{a}_i z^i\| \rightarrow 0$  となるような  $g \in A$  が存在して、 $E$  の上では  $g = \bar{f}$  となる。このことから  $\text{Re } A|_E$  は ring となるが、 $A|_E$  は  $C(E)$  と一致しない。なんとなれば  $f(\frac{1}{n}) = 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) となる  $f \in A$  は一致の定理より当然恒等的に 0 となるわけはなからぬからである。

つぎに  $\text{Re } A$  についての Arenson の結果、およびそれから出てくるものについて述べる。

1°  $u \in \text{Re } A$  とする。  $u \in A$  となるための必要十分条件はすべての実数値連続関数 (直線上で定義された)  $f$  に対して  $f \circ u \in \text{Re } A$  となることである。ここで  $(f \circ u)(x) = f(u(x))$  である。

こゝの系としてつぎが証明される。

2°  $A_1, A_2 \in X$  の上の二つの function algebra とする。

そのとき  $\text{Re } A_1 = \text{Re } A_2$  とすれば  $A_1 = A_2$  の Šilov の partition および Bishop の partition はおのれの一致する。

ここで  $A$  を任意の function algebra としたとき、Šilov の partition とは、 $X$  の二点  $x, y$  が  $x \sim y$  であることを  $A$  の任意の実関数  $f$  で  $f(x) = f(y)$  で定義する。この同値関係による同値類をいう。Bishop の partition は  $X$  を maximal antisymmetric set で別けたものである。

Glicksberg [46] はつぎのことを示した。  $F \subseteq \text{closed } G_\delta \text{ set}$  とし、  $\mu \perp A$  とする finite complex Baire measure ( $X$  の上の)  $\mu$  に対して  $\chi_F \mu \perp A$  とするとなれば  $F$  は  $A$  の peak set である。ここで  $\mu \perp A$  はすべての  $f \in A$  で  $\int f d\mu = 0$  となること。  $F$  は  $A$  の peak set とは、ある  $f \in A$  が存在して  $F = \{x \in X : f(x) = 1\}$  かつ  $|f(x)| < 1$  ( $x \notin F$ ) のときをいう。この Glicksberg の結果を用いて

3°  $\text{Re } A_1 = \text{Re } A_2$  とすれば  $A_1$  の peak sets と  $A_2$  の peak sets とは一値する。

また 2° からつぎのことが容易に求められる。

4°  $A_1, A_2 \in X$  の上の二つの function algebra とし、

$A_1 \subset A_2$  かつ  $\text{Re } A_1 = \text{Re } A_2$  とする。そのときは  $A_1 = A_2$  となる。

## §3 Harmonic class

あとの節のために Brelot の axiom と、それに関する P. A. Loeb and B. Walsh [18] の定理について述べる。

$W$  を locally compact Hausdorff 空間で、連結かつ局所連結として compact でないとする。  $H$  は  $W$  の中のある開集合をその domain にもつ実数値連続関数の族であって、  $W$  の中の任意の開集合  $\Omega$  に対して  $\Omega$  をその domain としてもつような  $H$  の中の関数の集り  $H_\Omega$  は実線型空間をなすと仮定する。

$W$  の中の開集合  $\Omega$  が  $H$  に関して正則 (regular) であるとは、  $\bar{\Omega}^W$  が compact であり  $\partial\Omega$  ( $\Omega$  の topological boundary) の上で定義された任意の実数値連続関数  $f$  に対して、つぎのような  $\bar{\Omega}^W$  の上で定義された連続関数  $h$  が unique に存在する、すなわち

$$h|_{\partial\Omega} = f, \quad h|_{\Omega} \in H \quad \text{それ} \quad f \geq 0 \quad \text{なら} \quad h \geq 0.$$

また  $H$  が  $W$  の上の harmonic class であるとは、つぎの三つの axiom をみたすときであるとする (Brelot [2]).

Axiom I. open domain  $\Omega$  ( $\subset W$ ) をもつ関数  $g$  に対して、  $\Omega$  の任意の点  $x$  で、ある  $h \in H$  とある開集合  $\Omega_1$  が  $x \in \Omega_1 \subset \Omega$  で  $g|_{\Omega_1} = h|_{\Omega_1}$  のように存在すれば、  $g \in H$  となる。

Axiom II.  $W$  は正則な region (= non empty connected open set) が開集合の基となっている。

Axiom III.  $\Omega \in W$  の中の region とし、 $\mathcal{F} \in H_\Omega$  の中の任意の ordered increasing directed family とすれば、 $\mathcal{F}$  の upper envelop は  $+\infty$  であるか、または  $H_\Omega$  の中の一つの関数である。

Constantinescu and Cornea [4] は上の Axiom I, II のもとで Axiom III はつぎのどちらかに同等であることを証明した。

Axiom III<sub>1</sub>  $\Omega \in W$  の中の region とする。 $\{f_n\} \in H_\Omega$  の中の任意の単調増加関数列とすれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv +\infty$  かまたは  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in H_\Omega$ 。

Axiom III<sub>2</sub>  $\Omega \in W$  の中の region とし、 $K \in \Omega$  の中の compact 部分集合、 $x_0 \in K$  とする。そのときつぎのような定数  $M (\geq 1)$  が存在する: すべての  $f \in H_\Omega$ ,  $f \geq 0$  と任意の  $x \in K$  に対して

$$f(x) \leq M \cdot f(x_0).$$

ここで Axiom III<sub>1</sub> は Harnack principle を表わし、Axiom III<sub>2</sub> は弱意味の  $H_\Omega$  に関する Harnack inequality を表わす。

Loeb and Walsh [18] はつぎのことを証明した。

定理  $H$  は harmonic class で  $\Omega \in W$  の中の region とする。  $x_0 \in \Omega$  の任意の点とし、  $\Phi = \{h \in H_\Omega : h \geq 0, h(x_0) = 1\}$  とおく。そのとき  $\Phi$  は  $x_0$  において equicontinuous である。

このことを用いると、Axiom III はまたつぎの Axiom III<sub>3</sub> に同値となる。

Axiom III<sub>3</sub>  $\Omega \in W$  の中の region とする。そのとき  $H_\Omega$  の中の nonnegative な関数は  $\equiv 0$  か、または  $\Omega$  において零点をもたない。さらに任意の  $x_0 \in \Omega$  に対して

$$\Phi_{x_0} = \{h \in H_\Omega : h \geq 0, h(x_0) = 1\}$$

は  $x_0$  において equicontinuous となる。

ここで Axiom III<sub>2</sub> を考之に入れれば、上の  $\Phi_{x_0}$  は  $\Omega$  の任意の点で equicontinuous となる。Abstract harmonic function を考之に際し、この条件を出発点とする (§. 5)。

#### § 4. Gleason parts

あとの準備のために Gleason parts のことにふれておく。Gleason parts は function algebra において定義されるが、それを更に拡張して、実数値連続関数からなる線型空間においても考之られる ([4])。最近では convex sets や cone など



についても考えられている ([7], [10])。

$X$  を compact Hausdorff 空間とし、 $B$  を  $X$  の上の実数値連続関数からなる線型空間で  $1$  を含み、 $X$  の点を分離するものとする。

定義  $x, y \in X$  に対して  $x \sim y$  であるとは、 $B$  に含まれる任意の  $u (> 0)$  に対して

$$\frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a$$

となる  $a (> 0)$  が存在することである。 $\sim$  が同値関係となることは Bear [4] によって示された。

Gleason part は、始め function algebra において考えられた (Gleason [15])。  $A$  を function algebra とし、その maximal ideal space を  $M_A$  としたとき  $M_A \ni x, y$  に対して  $x \sim y$  であるとは

$$\sup \{ |f(x) - f(y)| ; f \in A, \|f\| \leq 1 \} < 2$$

のときであると定義する。 Gleason は  $\sim$  が同値関係であることを指摘した。この定義は  $X$  が  $A$  の表現空間であるときに同様に出来るわけであるが、この function algebra と連続関数からなる線型空間での両方の同値関係の間にどんな関係があるかについては Bear はつきのことと証明した:  $A$  を  $X$  の上

の function algebra とし、 $B = \text{Re } A$  とする。そのとき function algebra  $A$  に関する同値関係  $\sim$  と、線型空間  $B$  に関する同値関係  $\sim$  とは同等である。

さて  $B \in X$  の上の連続関数からなる線型空間とし、 $P \in I$  の part としたとき、 $x, y \in P$  に対して

$$R(x, y) = \inf \left\{ a ; \frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a, u \in B^+ \right\}$$

とおく。ここで  $B^+$  は  $u > 0$  となる  $B$  の関数全体を表わす。

そのとき  $R(x, y) \geq 1$ ,  $R(x, y) = 1 \iff x = y$ ,

$R(x, y) = R(y, x)$  として  $R(x, y)R(y, z) \geq R(x, z)$  と

なることは明らか。

それゆゑに  $d(x, y) = \log R(x, y)$  は  $P$  の上の距離を表わすことになる、すなわち  $P \ni x, y, z$  に対して

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(iii) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

### § 5 Part の上の位相

$X$  を可分 compact Hausdorff 空間とする。  $B$  を  $X$  の上で定義された実数値連続関数からなる線型空間で、 $1 \in B$  かつ  $X$  の点を分離するものと仮定する。  $\Gamma$  を  $B$  の  $\checkmark$  Silov 境界とし、 $\Delta = X \setminus \Gamma \neq \emptyset$  とする。

いま ball  $B = \{u \in B, \|u\| \leq 1\}$ . また  $z \in \Delta$  を固定し

$$B^+(z) = \{u|_{\Delta} : u \in B, u > 0, u(z) = 1\}$$

とおく。§3で述べたように Loeb and Walsh は Brelot's axiomatic potential theory の convergence axiom として、上の  $B^+(z)$  が equicontinuous となること  $\varepsilon$  としてよいことを示した。このあと  $\Delta$  が一つの part になっている場合を考へるが、 $B^+(z)$  が equicontinuous となることを仮定する。

$\Delta$  にはつきのような位相が入れられる：

(T)  $X$  の位相から induce された位相。

(T\*)  $X$  の二点  $x, x'$  に対して、 $d_*(x, x') = \|x - x'\|_*$   
 $= \sup \{|f(x) - f(x')| : f \in B, \|f\| \leq 1\}$ 。すなわち  
 $x$  を evaluation として考へた距離による位相。

(Td) §4で定義した  $d(x, y) = \log R(x, y)$ 、すなわち  
 "part metric" による位相。

(T $_{\infty}$ )  $B$  が  $(U)$  空間のとき、 $\Delta$  を  $\{f_x : x \in \Delta\} \subset L_{\infty}(\mu)$   
 ( $\mu$  は  $Z$  の表現測度) と同一視したとき  
 $d_{\infty}(x, y) = \|x - y\|_{\infty} = \|f_x - f_y\|_{\infty}$  で入れられ  
 た位相。

ここで  $(U)$  空間のことについて示しておく。  $B$  が  $(U)$  空間であるとは、任意の  $x \in \Delta$  に対して evaluation functional

$e_x \in B^*$  が唯一つの極大表現測度  $\mu_x$  ( $\Gamma$  の上) をもつ  
 ときにいふ。この測度は  $B$  に因する Choquet 境界の中にその  
 support をもつことはよく知られている ([21] 参照)。また  
 $B^*$  の positive cone の base  $\{F: F \in B^*, \|F\|=1=F(1)\}$  が  
 simplex (convex set  $K$  が simplex であるとは、 $K$  から生  
 成された cone  $\tilde{K} = \{\alpha x: \alpha \geq 0, x \in K\}$  に対して  $\tilde{K} - \tilde{K}$  が  
 lattice をなすこと、すなわち  $x, y \in \tilde{K} - \tilde{K}$  なら  $x \vee y \in \tilde{K} - \tilde{K}$   
 となることである。ここで  $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \tilde{K}$ ) である  
 ば  $B$  は (U) 空間なること、および  $B$  が Denichlet 空間  
 ( $B|_\Gamma = C(\Gamma)$ , [6] 参照) なるとき  $B$  は (U) 空間なる  
 ことが知られる。

$B$  が (U) 空間で、 $\Delta$  が一つの part であるとき  $\Delta$  の任意の  
 二点  $x, y$  に対して、それ等の極大表現測度  $\mu_x, \mu_y$  は互に  
 absolutely continuous で bounded derivative をもつ ([11] と同  
 様な方法で証明出来る)。固定された  $z \in \Delta$  に対する  $\mu_z$   
 を  $\mu$  とおくことにすれば、任意の  $x \in \Delta$  に対して  $g_x \in L_\infty(\mu)$   
 が存在して  $d\mu_x = g_x d\mu$ 。ここで  $\Delta$  と  $\{g_x; x \in \Delta\}$  を  
 同一視することが出来、上にあげた位相 ( $T_\infty$ ) を  $\Delta$  に入れ  
 ることが出来る。

これ等の位相の間にはつぎのような関係がある。

定理 1°.  $T = T^* \Leftrightarrow$  Ball  $B$  が equicontinuous ( $\Delta$  の上)

)。  $B^+(z)$  は  $\Delta$  で equicontinuous ならば、Ball  $B$  は  $\Delta$  で equicontinuous。

2°。  $\Delta$  が 1 つの part であるとする。 そのとき  $T_d > T_* > T$ 。  
 $B^+(z)$  が equicontinuous  $\Leftrightarrow T = T_d$ 。

3°。  $\Delta$  が 1 つの part であり、  $B$  は  $(U)$  空間とする。 そのとき  $T_\infty = T_d > T_* > T$ 。  $\Leftrightarrow B^+(z)$  が  $\Delta$  で equicontinuous ならば  $T = T_d = T_\infty = T_*$ 。

証明。 2° の証明:  $T_* > T$  は 殆んど明らかである。  $T_d > T_*$  を示す。  $x_n, x \in \Delta$  で  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  とする。 そのとき  $R(x_n, x) \rightarrow 1$ 。 与えられた  $\varepsilon > 0$  に対して  $N$  が存在して、任意の  $u \in B^+$ ,  $n \geq N$  に対して

$$\left| \frac{u(x_n)}{u(x)} - 1 \right| = \frac{|u(x_n) - u(x)|}{u(x)} < \varepsilon。$$

もし  $\|v\| \leq 1$ ,  $v \in B$  となる任意の  $v$  に対して  $u = v + 2$  とおけば、  $1 \leq u \leq 3$  である。

$$u(x_n) - u(x) = v(x_n) - v(x)$$

$$\left| \frac{v(x_n) - v(x)}{v(x) + 2} \right| < \varepsilon \quad (n \geq N)。$$

よって  $|v(x_n) - v(x)| < 3\varepsilon$  ( $v \in B, \|v\| \leq 1, n \geq N$ )。

これは  $\|x_n - x\|_* \rightarrow 0$  となることを示している。

つきに  $B^+(z)$  が  $\Delta z$  equicontinuous ならば、 $T > T_d$  と  
 なること  $\varepsilon \dots$ 。  $x_n \rightarrow x(T)$  とする。  $B^+(z)$  は equicontinuous  
 なるゆえ、任意の  $u \in B^+(z)$  に対して一様に  $|u(x_n) - u(x)|$   
 $\leq \varepsilon_n \rightarrow 0$ 。 よって任意の  $u \in B^+(z)$

$$\frac{u(x)}{u(z)} \geq \frac{1}{R(x, z)}, \quad u(x) \geq \frac{1}{R(x, z)}.$$

ゆえに任意の  $u \in B^+(z)$  として

$$|u(x_n) - u(x)| \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_n R(x, z) u(x),$$

$$\left| \frac{u(x_n)}{u(x)} - 1 \right| \leq \varepsilon_n R(x, z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

よって任意の  $v \in B^+$  に対して、ある  $\gamma > 0$ 、 $u \in B^+(z)$   
 として  $v = \gamma u$  となるゆえ、任意の  $v \in B^+$  として一様に

$$\left| \frac{v(x_n)}{v(x)} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

これは  $R(x_n, x) \rightarrow 1$ 、すなわち  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  を表わす。

3° の証明:  $T_\infty > T_d$  を示す。  $u \in B^+(z)$  ならば

$$\begin{aligned} |u(x_n) - u(x)| &= \left| \int_{\Gamma} u(g_{x_n} - g_x) d\mu \right| \\ &\leq \|g_{x_n} - g_x\|_\infty \int_{\Gamma} u d\mu \end{aligned}$$

$$= \|x_n - x\|_\infty u(z).$$

$u(z) = 1$  なる中之、 $x_n \rightarrow x (T_\infty)$  なる  $u \in B^+(z)$  として、  
 に  $u(x_n) \rightarrow u(x)$ 。2° の証明と同様に  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ 。

逆に  $T_d > T_\infty$  となることを示す。B は (U) 空間であるから  
 $\Delta$  の二点  $x, y$  に関しての上の Radon-Nikodym derivative  
 $g_x, g_y$  はつききを見出す ([11] 参照)。

$$\frac{1}{R(x, y)} \leq \frac{g_x}{g_y} \leq R(x, y) \quad (\text{a.e. } \mu).$$

$g_z \equiv 1$  となることから

$$0 \leq g_x \leq R(x, z) = \exp d(x, z) \quad (\text{a.e. } \mu).$$

中之に  $\Delta$  の二点  $x, y$  に対して

$$|g_x - g_y| \leq g_y [R(x, y) - 1] \leq R(y, z) [R(x, y) - 1] \quad (\text{a.e. } \mu).$$

中之に  $x \rightarrow y (T_d)$  なる  $R(x, y) \rightarrow 1$  ( $d(x, y) \rightarrow 0$  なる)  
 となることから  $\|g_x - g_y\|_\infty \rightarrow 0$ 。

$B^+(z)$  が equicontinuous なる 2° から  $T = T_d$  となるから、  
 $T = T_\infty$  となる。

## § 6. B に関する integral kernel.

単位円板上の負でない harmonic function は単位円上のある

る正測度の Poisson 積分として表わされるという Herglotz の定理は古典的に知られている。Martin [9] はこの問題を任意の domain において考えた。さらに進んで abstract な harmonic function をある kernel による一般測度での積分で表わすことについては多くの研究がある (例之は [3], [5])。またもう一つの harmonic function に対する kernel representation (つぎの定理参照) も [8], [9] などで考えられた。この後 Bear and Walsh [9] を中心に考えて見よう。この論文は ideal boundary をもつ Riemann surface の上の harmonic function に関して考えた Nakai [20] の手法を応用してある。

定理  $\Delta$  が 1 つの part をとり、 $B^+(z)$  は equicontinuous で  $B$  を  $(U)$  空間とする。そのとき正測度  $\mu = \mu_z$  と jointly measurable function  $Q(x, \theta)$  ( $\Delta \times \Gamma$  の上で定義された) が存在して

(i)  $Q(\cdot, \theta)$  は任意の  $\theta \in \Gamma$  に対して、 $\Delta$  の上の連続関数となり

(ii)  $0 \leq Q(x, \theta) \leq R(x, z)$  ( $(x, \theta) \in \Delta \times \Gamma$ )

であり、かつ任意の  $u \in B$ ,  $x \in \Delta$  で

$$u(x) = \int_{\Gamma} u(\theta) Q(x, \theta) d\mu(\theta).$$

証明  $\mu$  を  $Z$  を表現する測度とする。  $D \in Z$  を含むような



$\Delta$  の可附番稠密部分集合とする。  $D$  の任意の元  $x$  に対して、  
 $\Gamma$  の上の measurable function  $Q(x, \cdot)$  が存在して、  $Q(x, \cdot) d\mu(\cdot)$   
 が  $x$  を表現すれば

$$|Q(x, \cdot) - Q(y, \cdot)| \leq R(y, z) [R(x, y) - 1]$$

$$0 \leq Q(x, \cdot) \leq R(x, z) \quad (\text{a.e. } \mu).$$

$E$  上の式がみたされないうような  $\Gamma$  の  $\mu$ -零集合の可附番  
 個の和集合とすれば、  $\mu(E) = 0$ .  $\square$

$$|Q(x, \theta) - Q(y, \theta)| \leq R(y, z) [R(x, y) - 1]$$

$$0 \leq Q(x, \theta) \leq R(x, z)$$

が  $\Gamma \sim E$  の任意の  $\theta$  と  $D$  の任意の二つの元  $x, y$  で成立する。  
 $\{x_n\}, \{x'_n\} \in D$  の中の二つの数列とし、  $x_n \rightarrow x, x'_n \rightarrow x$   
 $(x \in \Delta)$  とする。 そのとき  $|Q(x_n, \theta) - Q(x'_n, \theta)| \leq \theta \in$   
 $\Gamma \sim E$  で一様に収束する。 ゆえに任意の  $x \in \Delta$  に対して  
 $x_n \rightarrow x$  とする  $D$  の中の数列  $\{x_n\} \in \Sigma$  を

$$\begin{aligned} Q(x, \theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Q(x_n, \theta) \quad (\theta \notin E) \\ &= 1 \quad (\theta \in E) \end{aligned}$$

と定義する。  $Q$  は  $\Delta \times \Gamma$  の上で定義され、これが本来的ものである。 なんとなれば  $Q$  は  $\theta$  で measurable で、  $x$  で連続なることは明らか。 加之に  $Q$  は jointly measurable となる。

Bounded convergence theorem より、すべての  $u \in B$  で

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} u(\theta) Q(x_n, \theta) d\mu(\theta) \\ &= \int_{\Gamma} u(\theta) Q(x, \theta) d\mu(\theta). \end{aligned}$$

よして それ中之  $Q(x, \cdot) d\mu(\cdot)$  は  $x \in \Delta$  を表現する。

Nakai [20] は Riemann surface において考察した際に、任意の  $\theta \in \Gamma$  に対して  $Q(\cdot, \theta)$  は harmonic function に出来ることを示し、Walsh and Loeb [23] は locally compact Hausdorff 空間の上で定義された abstract harmonic function の場合に拡張した。

いま  $\hat{B}$  を  $B|\Delta$  の  $\Delta$  の compact 部分集合の上での一様収束の位相での閉包とすれば、この  $\hat{B}$  は開集合  $\Delta$  の上の harmonic function 全体の空間と見做すことが出来る。 上に述べたような意味でつきが証明出来る。

定理  $\Delta$  が一つの part になつていて、  $B^+(z)$  は equicontinuous

かつ  $B \in (U)$  を閉とする。そのとき上の定理は亦け  
 ような kernel  $Q(x, \theta)$  が存在し、任意の  $\theta \in \Gamma$  に対し  
 $Q(\cdot, \theta) \in \hat{B}$  となる。

注. 最近  $N_\Omega$  と nuclear space との関連性から integral representation  
 の研究がなされてゐる (Hinrichsen, Ann. Inst. Fourier (1967), [23]) .

#### 参考文献

- [1] E. L. Arenson : Certain properties of algebras of  
 continuous functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 171 (1966)  
 No. 4. Soviet Math. Dokl. Vol. 7 (1966), No. 6, 1522-1524.
- [2] H. Bauer : Axiomatische Behandlung des Dirichletschen  
 Problems für elliptische und parabolische Differential-  
 gleichungen, Math. Ann, 146 (1962) 1-59.
- [3] H. S. Bear : An abstract potential theory with  
 continuous kernel, Pacific J. Math., 14 (1964) 407-420.
- [4] ——— : A geometric characterization of Gleason  
 parts, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965) 407-412.
- [5] ——— : The integral representation of functions  
 on parts, Ill. J. Math., 10 (1966) 49-55.
- [6] ——— : Continuous subparts for function spaces,  
 Function algebra (Proc. International Symposium) 1965
- [7] ——— : The part metric in a cone (to appear)

- [8] H. S. Bear and A. M. Gleason : A global integral representation for abstract harmonic functions, *J. Math. Mech.*, 16 (1967) 639-653.
- [9] H. S. Bear and B. Walsh : Integral kernel for one-part function spaces, *Pacific J. Math.*, 23 (1967) 209-215.
- [10] H. S. Bear and M. L. Weiss : Intrinsic metric for parts, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18 (1967) 812-817.
- [11] E. Bishop : Representing measures for points in a uniform algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964) 121-122.
- [12] M. Brelot : Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay (1960).
- [13] A. Browder : On a theorem of Hoffman and Wermer, *Function algebras (Proc. International Symp) 1965*.
- [14] C. Constantinescu and A. Cornea : On the axiomatic for harmonic functions I, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 2 (1963) 373-388.
- [15] A. M. Gleason : Function algebras, *Seminars on analytic functions II*, 1957.
- [16] I. Glicksberg : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105 (1962) 415-435.

- [17] K. Hoffman and J. Wermer: A characterization of  $C(X)$ , *Pacific J. Math.*, 12 (1962) 941-944.
- [18] P. A. Loeb and B. Walsh: The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965) 597-600.
- [19] R. S. Martin: Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941) 137-172.
- [20] M. Nakai: Radon-Nikodym densities between harmonic measures on the ideal boundary of an open Riemann surface, *Nagoya Math. J.*, 27 (1965) 71-76.
- [21] R. R. Phelps: *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand Company (1966).
- [22] S. J. Sidney and E. L. Stout: A note on interpolation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968) 380-382.
- [23] B. Walsh and P. A. Loeb: Nuclearity in axiomatic potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966) 685-689.
- [24] J. Wermer: The space of real parts of a function algebras, *Pacific J. Math.*, 13 (1963) 1423-1426.