

## 平面上の追跡・回避ゲーム

阪大 基礎工 坂和愛幸, 福西宏有, 森岡孝男

## 1. まえがき

互いに利害の相反する2人のプレイヤーの間で行なわれるゲームの状態が, ある微分方程式を通じてそれぞれのプレイヤーの戦略(あるいは制御)に支配されるような零和2人ゲーム (zero-sum two-player game) は微分ゲームと称せられる。微分ゲームにおいてとくに相手が戦略を持たない場合には1人のゲームとなり, 最適制御の問題と一致する。したがって微分ゲームは最適制御問題の拡張であるといえよう。両者の間の本質的な相違は, 最適制御では単に評価関数の最大あるいは最小を追求して制御を決定すればよいが, 微分ゲームでは利害の相反する相手がいるから, 常に相手のとる戦略を考慮しながら自分の利益の最大を追求しなければならない点である。すなわち相手の最良の戦略(自分にとっては最も不利な相手の戦略)を予想して, その条件下で自己の利益が最大となるように戦略を決めることが必要である。

微分ゲームの研究は、R. Isaacs<sup>1)</sup>、L.S. Pontryagin<sup>2)-4)</sup>、  
 L.D. Berkovitz<sup>5)-7)</sup>らによってなされてきた。本文では、微  
 分ゲームの一つの問題としての平面上の追跡-回避ゲーム (pursuit-evasion game) を Isaacs の手法を用いて考察する。  
 追跡者 (pursuer) および回避者 (evader) は一定の推力の  
 大きさを持ち、その方向を自由に制御できるとする。ゲーム  
 のペイオフ (payoff) は捕捉までの時間とする。したがって  
 追跡者はできるだけ速かに回避者を捕捉するよう努力し、後  
 者は逆にできるだけ前者の捕捉を免れるように努力する。ま  
 た追跡者と回避者の距離がある一定値以下になれば捕捉が起  
 るとする。

このようなゲームについては、回避者に慣性がなくその速  
 度の大きさが常に一定の場合の考察が Isaacs<sup>1)</sup> によっ  
 てなされている。本文では、回避者にも慣性を考慮したより実  
 際的な追跡-回避ゲームを Isaacs の方法で扱う。さらにゲーム  
 が完了するための条件について考察する。

## 2. 微分ゲーム<sup>1)</sup>

Isaacs による微分ゲームの解法<sup>1)</sup>について簡単に述べよう。  
 ゲームの状態が  $x = (x_1, \dots, x_n)$  なる  $n$  次元 Euclid 空  
 間  $R^n$  のベクトルで表わされ、各時刻  $t$  におけるゲームの

状態が

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, \phi_1, \dots, \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_m) \quad (1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

なる微分方程式で規定されるとする。  $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_2(t))$  ,  $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_m(t))$  はそれぞれプレイヤー I およびプレイヤー II の戦略 (strategy) を表わすベクトルである。

$\Omega_\phi$ ,  $\Omega_\psi$  をそれぞれ  $R^l$ ,  $R^m$  の有界閉集合とし,

$$\phi(t) \in \Omega_\phi, \quad \psi(t) \in \Omega_\psi \quad (2)$$

なる拘束条件が課せられるものとする。  $f = (f_1, \dots, f_n)$  とおいて (1) 式をベクトル形式で書くと,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, \phi(t), \psi(t)) \quad (3)$$

となる。両プレイヤーはともにゲームの現在の状態, およびゲームの進行を支配する微分方程式 (3) を知っているものと仮定する。

$R^n$  においてある滑らかな多様体  $M$  が与えられ, ゲームの状態  $x$  が  $M$  に到達したときゲームは終了したと考える。ゲームの初期条件を  $x(t_0) = x_0$ , ゲーム終了の時刻を  $t_1$  ( $x(t_1) \in M$ ) とするとき,

$$P(x_0, \phi, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \phi, \psi) dt + H(x(t_1)) \quad (4)$$

なる量をペイオフ (評価関数) に採ろう。プレイヤー I は (4) 式を最小にするよう努力し、プレイヤー II はそれとは反対に (4) 式のペイオフを最大にするように努力する。(4) 式の右辺第一項はゲームの進行過程に依存するが、第二項はゲームの最後の状態だけに依存する。

時間区間  $[t_0, t_1]$  において区分的に連続、かつ  $\phi(t) \in \Omega_\phi$ ,  $\psi(t) \in \Omega_\psi$  であるような戦略  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  の関数族をそれぞれ  $D_\phi$ ,  $D_\psi$  で表わそう。

$$\begin{aligned} \min_{\phi \in D_\phi} \max_{\psi \in D_\psi} P(x_0, \phi, \psi) &= \max_{\psi \in D_\psi} \min_{\phi \in D_\phi} P(x_0, \phi, \psi) \\ &= P(x_0, \bar{\phi}, \bar{\psi}) \quad (5) \end{aligned}$$

なる関係を満足する  $\bar{\phi}(t) \in D_\phi$ ,  $\bar{\psi}(t) \in D_\psi$  が存在する場合、 $\bar{\phi}(t)$ ,  $\bar{\psi}(t)$  を初期条件  $x_0$  に対応する最適戦略または最適制御という。最適戦略に対応して決定される (3) 式の解を最適軌道という。最適戦略をとったときのペイオフの値

$P(x_0, \bar{\phi}, \bar{\psi})$  は初期条件  $x_0$  だけに依存するから、

$P(x_0, \bar{\phi}, \bar{\psi}) = V(x_0)$  と書き、これをゲームの値という。

(5) 式の関係が成立する場合、任意の  $\phi(t) \in D_\phi$ ,  $\psi(t) \in D_\psi$  に対して

$$P(x_0, \bar{\phi}, \psi) \leq P(x_0, \bar{\phi}, \bar{\psi}) = V(x_0) \leq P(x_0, \phi, \bar{\psi}) \quad (6)$$

なる関係が成立することは明らかである。すなわち  $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$

は  $P(x_0, \phi, \psi)$  の鞍点 (saddle point) である。

Isaacs に従って dynamic programming の手法を用いて最適の必要条件を導くため、次のことを仮定する：

仮定 1. 任意の  $n$  ベクトル  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  に対して定義される

$$Q(\nu, x, \phi, \psi) = \sum_{i=1}^n \nu_i f_i(x, \phi, \psi) + G(x, \phi, \psi) \quad (7)$$

なるスカラー量は、すべての  $x$  に対して

$$\min_{\phi \in \Omega_\phi} \max_{\psi \in \Omega_\psi} Q = \max_{\psi \in \Omega_\psi} \min_{\phi \in \Omega_\phi} Q \quad (8)$$

なる関係を満足する。

仮定 2. ゲームの値  $V(x)$ 、その導関数  $\partial V / \partial x_i$ 、 $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) はそれぞれ連続である。

仮定 3. 状態空間の任意の点  $x$  から出発するゲームに対して、(6) 式を満足する最適戦略  $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\psi}$  とゲームの値  $V(x)$  が存在する。

$x(t_0) = x$  から出発する最適軌道上の任意の点  $x(t) = x$  ( $t_0 \leq t < t_1$ ) を初期値とするゲームを考えると、そのペイオフは

$$P(x, \phi, \psi) = \int_t^{t+\varepsilon} G(x(\tau), \phi(\tau), \psi(\tau)) d\tau$$

$$+ \int_{t+\varepsilon}^{t_1} G(x(t), \phi(t), \psi(t)) dt + H(x(t_1)) \quad (9)$$

$\varepsilon > 0$  を微小量とすると

$$\begin{aligned} V(x) &= \min_{\phi \in D_\phi} \max_{\psi \in D_\psi} P(x, \phi, \psi) = \max_{\psi \in D_\psi} \min_{\phi \in D_\phi} P(x, \phi, \psi) \\ &= \min_{\phi(t) \in \Omega_\phi} \max_{\psi(t) \in \Omega_\psi} \left[ G(x, \phi(t), \psi(t)) \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + V(x + \varepsilon f(x, \phi(t), \psi(t))) + O(\varepsilon) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R} \cup O(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$  である。

$V_i(x) = \partial V(x) / \partial x_i$  とおくと

$$V(x + \varepsilon f(x, \phi, \psi)) = V(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varepsilon f_i(x, \phi, \psi) + O(\varepsilon) \quad \dots (11)$$

であるから, (10), (11) 式より

$$\min_{\phi \in \Omega_\phi} \max_{\psi \in \Omega_\psi} \left[ \sum_{i=1}^n V_i(x) f_i(x, \phi, \psi) + G(x, \phi, \psi) \right] = 0 \quad (12)$$

なる条件を得る。(12) 式は最適戦略の満足すべき基本式である。最適戦略を  $\bar{\phi}, \bar{\psi}$  とおくと,

$$\sum_{i=1}^n V_i(x) f_i(x, \bar{\phi}, \bar{\psi}) + G(x, \bar{\phi}, \bar{\psi}) = 0 \quad (13)$$

とも書ける。

つぎに (13) 式の両辺を  $x_k$  で微分すると

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_k} f_i + \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial G}{\partial x_k} = 0 \quad (4)$$

さらに

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_k} f_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_k}{\partial x_i} f_i = \frac{dV_k}{dt}$$

であるから、(4)式より

$$\frac{dV_k}{dt} = - \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial f_i(x, \bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial x_k} - \frac{\partial G(x, \bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial x_k} \quad (15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

なる  $V_k = \partial V / \partial x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) の満足すべき方程式を得る。

終端の多様体  $M$  が  $n-1$  次元であるとし、 $M$  上の点  $x = (x_1, \dots, x_n)$  が独立な  $n-1$  個のパラメータ  $s_1, \dots, s_{n-1}$  によって

$$x_i = h_i(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

と表わされると仮定しよう。また  $x \in M$  の場合には (4) 式右辺第一項はゼロであるから、 $V(x) = H(x)$  である。

$H(x)$  の  $x$  に (16) 式を代入した式を

$$V(x) = H(x) = K(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (17)$$

と表わす。(17) 式の両辺を  $s_k$  で微分すると、

$$\frac{\partial K}{\partial S_k} = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial h_i}{\partial S_k} \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (18)$$

(13) 式の  $x$  に (16) 式を代入した式を (18) 式につけ加えると,  $n$  個の未知数  $V_i$  に対する  $n$  個の関係式を得る。これらを解くことにより多様体  $M$  上の  $V_i (i=1, \dots, n)$  の値をパラメータ  $s_1, \dots, s_{n-1}$  で表わすことができる。

$x \in M$  は  $s_1, \dots, s_{n-1}$  によって (16) 式のように表わされるから, 任意のパラメータ  $s_1, \dots, s_{n-1}$  に対応する  $x \in M$  および  $V_i (i=1, \dots, n)$  を初期条件として (3), (15) 式の逆行方程式 ( $t = t_1 - \tau, \tau > 0$  において (3), (15) 式に代入した方程式) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= -f_i(x, \bar{\phi}, \bar{\psi}) \\ \frac{dV_i}{d\tau} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x, \bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial x_i} V_k + \frac{\partial G(x, \bar{\phi}, \bar{\psi})}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} (19)$$

( $i=1, \dots, n$ )

を解くことにより, 最適戦略および最適軌道を得る。なお点  $x \in M$  における  $M$  に対する外向き法線ベクトルを  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  とすると, 最適軌道が  $M$  に到達するためには,

$$\min_{\phi \in \Omega_\phi} \max_{\psi \in \Omega_\psi} \sum_{i=1}^n \nu_i f_i(x, \phi, \psi) < 0 \quad (20)$$



なる条件を満足しなければならないことは明らかである。

$M$  の点で (20) 式を満足する部分を  $M$  の利用部分 (useable part) という。最適軌道は  $M$  の利用部分の外への点には到達することはできない。また (20) 式でとくに等式の成立する  $M$  の点を利用部分の境界という。

### 3. 追跡・回避ゲーム

追跡者 (pursuer)  $P$  が回避者 (evader)  $E$  を平面上で追跡するゲームを考えよう。 $P, E$  の位置を示す二次元ベクトルを  $r, r'$  とし、平面上の  $P, E$  の運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \alpha \frac{dr}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d^2 r'}{dt^2} + \beta \frac{dr'}{dt} = \vec{W} \quad (21)$$

で与えられるとする。ここに  $\vec{F}, \vec{W}$  はそれぞれ  $P, E$  の推力ベクトルであり、その大きさ  $F, W$  は一定であると仮定する。 $\alpha, \beta$  はそれぞれ正の定数である。 $P, E$  はそれぞれ推力の方向を自由に制御できるとし、 $\vec{F}, \vec{W}$  なる推力ベクトルの水平方向からの角度をそれぞれ  $\theta, \psi$  とする。

Fig. 1 に示すように  $E$  に対する  $P$  の相対位置ベクトルを  $r - r' = (x_1, x_2)$ ,  $P$  の速度ベクトルを  $u = (x_3, x_4)$ ,  $E$  の速度ベクトルを  $v = (x_5, x_6)$  とすると、(21) 式の運動方程式は次のように書き改められる：

②

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= x_3 - x_5, & dx_2/dt &= x_4 - x_6 \\ dx_3/dt &= F \cos \phi - \alpha x_3, & dx_4/dt &= F \sin \phi - \alpha x_4 \\ dx_5/dt &= W \cos \psi - \beta x_5, & dx_6/dt &= W \sin \psi - \beta x_6 \end{aligned} \right\} (22)$$

状態ベクトル  $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$  の到達すべき多様体

を

$$M = \{x : x_1^2 + x_2^2 = l^2\} \quad (23)$$

と定義しよう。すなわち  $P$  と  $E$  の距離が与えられた距離  $l$  に等しくなればゲームは終了したと見做す。ゲームのペイオフとしては捕捉までの時間をとる。  $G = 1$  において (2) 式を適用すると

$$\begin{aligned} \min_{\phi} \max_{\psi} & \left[ (x_3 - x_5) V_1 + (x_4 - x_6) V_2 + (F \cos \phi - \alpha x_3) V_3 \right. \\ & + (F \sin \phi - \alpha x_4) V_4 + (W \cos \psi - \beta x_5) V_5 \\ & \left. + (W \sin \psi - \beta x_6) V_6 + 1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。

$$\sigma = \sqrt{V_3^2 + V_4^2}, \quad \rho = \sqrt{V_5^2 + V_6^2} \quad (25)$$

とおくと, (24) 式より最適戦略  $\bar{\phi}, \bar{\psi}$  は

$$\left. \begin{aligned} \cos \bar{\phi} &= -V_3/\sigma, & \sin \bar{\phi} &= -V_4/\sigma \\ \cos \bar{\psi} &= V_5/\rho, & \sin \bar{\psi} &= V_6/\rho \end{aligned} \right\} (26)$$

を満足する。(26)式を(24)式に代入すると

$$(x_3 - x_5)V_1 + (x_4 - x_6)V_2 - F\sigma + W\rho - \alpha(x_3V_3 + x_4V_4) - \beta(x_5V_5 + x_6V_6) + 1 = 0 \quad (27)$$

(19)式の逆行方程式を書くと次のようになる:

$$\left. \begin{aligned} dx_1/d\tau &= -x_3 + x_5, & dx_2/d\tau &= -x_4 + x_6 \\ dx_3/d\tau &= \alpha x_3 - F \cos \bar{\varphi}, & dx_4/d\tau &= \alpha x_4 - F \sin \bar{\varphi} \\ dx_5/d\tau &= \beta x_5 - W \cos \bar{\psi}, & dx_6/d\tau &= \beta x_6 - W \sin \bar{\psi} \end{aligned} \right\} (28)$$

$$\left. \begin{aligned} dV_1/d\tau &= 0, & dV_2/d\tau &= 0 \\ dV_3/d\tau &= V_1 - \alpha V_3, & dV_4/d\tau &= V_2 - \alpha V_4 \\ dV_5/d\tau &= -V_1 - \beta V_5, & dV_6/d\tau &= -V_2 - \beta V_6 \end{aligned} \right\} (29)$$

多様体  $M$  の点をパラメータ  $s_1, s_2, \dots, s_5$  によって

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l \cos s_1, & x_2 &= l \sin s_1, & x_3 &= s_2 \\ x_4 &= s_3, & x_5 &= s_4, & x_6 &= s_5 \end{aligned} \right\} (30)$$

と表わそう。 $M$ に対する外向き法線ベクトルは

$$\nu = (\cos s_1, \sin s_1, 0, \dots, 0)$$

で与えられるから, $M$ の利用部分は(20)式より

$$(s_2 - s_4) \cos s_1 + (s_3 - s_5) \sin s_1 < 0 \quad (31)$$

で与えられる。

次に  $M$  における  $V_i$  の値を (18), (27) 式より求めよう。  
 $M$  上では明らかに  $V(x) = H(x) = K(s_1, \dots, s_5) = 0$  である  
 から、次の関係式が成立する：

$$\left. \begin{aligned} V_1(-l \sin S_1) + V_2 l \cos S_1 &= 0 \\ V_3 = V_4 = V_5 = V_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(32) 式の第 1 式より

$$V_1 = \lambda \cos S_1, \quad V_2 = \lambda \sin S_2 \quad (33)$$

とおくことができる。これらの値を (27) 式に代入すると

$$(S_2 - S_4) \lambda \cos S_1 + (S_3 - S_5) \lambda \sin S_2 + 1 = 0 \quad (34)$$

よって

$$\lambda = \frac{-1}{(S_2 - S_4) \cos S_1 + (S_3 - S_5) \sin S_2} > 0 \quad (35)$$

$\lambda > 0$  となることは (31) 式より明らかである。

このように  $M$  における  $V_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ) の値が求まったから、(32), (33) 式を初期条件として (29) 式を積分することができる。その結果は次の通りである：

$$\left. \begin{aligned} V_1(\tau) &= \lambda \cos S_1, & V_2(\tau) &= \lambda \sin S_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} V_3(\tau) &= \lambda \cos S_1 (1 - e^{-\alpha\tau}) / \alpha, & V_4(\tau) &= \lambda \sin S_1 (1 - e^{-\alpha\tau}) / \alpha \\ V_5(\tau) &= -\lambda \cos S_1 (1 - e^{-\beta\tau}) / \beta, & V_6(\tau) &= -\lambda \sin S_1 (1 - e^{-\beta\tau}) / \beta \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(25) 式に (36) 式を用いると,

$$\sigma = \lambda \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}, \quad \rho = \lambda \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \quad (37)$$

さらに (26) 式に (36), (37) 式を用いると,

$$\left. \begin{aligned} \cos \bar{\phi} &= -\cos S_1 = \cos \bar{\psi} \\ \sin \bar{\phi} &= -\sin S_1 = \sin \bar{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

なる重要な結果を得る。(38) 式より

$$\bar{\phi}(\tau) = \bar{\psi}(\tau) = \text{const.} \quad (39)$$

であり, 追跡者 P および回避者 E の推力の方向を一定かつ同一方向にとるのがそれぞれの最適戦略であることがわかる。

次に (30) 式の初期条件を用いて (28) 式を積分すると,

$$\left. \begin{aligned} x_1(\tau) &= \left\{ l - \frac{F}{\alpha^2} (e^{\alpha\tau} - 1 - \alpha\tau) + \frac{W}{\beta^2} (e^{\beta\tau} - 1 - \beta\tau) \right\} \cos S_1 \\ &\quad - s_2 \frac{e^{\alpha\tau} - 1}{\alpha} + s_4 \frac{e^{\beta\tau} - 1}{\beta} \\ x_2(\tau) &= \left\{ l - \frac{F}{\alpha^2} (e^{\alpha\tau} - 1 - \alpha\tau) + \frac{W}{\beta^2} (e^{\beta\tau} - 1 - \beta\tau) \right\} \sin S_1 \\ &\quad - s_3 \frac{e^{\alpha\tau} - 1}{\alpha} + s_5 \frac{e^{\beta\tau} - 1}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 x_3(\tau) &= \frac{F}{\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) \cos S_1 + S_2 e^{\alpha\tau} \\
 x_4(\tau) &= \frac{F}{\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) \sin S_1 + S_3 e^{\alpha\tau} \\
 x_5(\tau) &= \frac{W}{\beta} (e^{\beta\tau} - 1) \cos S_1 + S_4 e^{\beta\tau} \\
 x_6(\tau) &= \frac{W}{\beta} (e^{\beta\tau} - 1) \sin S_1 + S_5 e^{\beta\tau}
 \end{aligned}$$

(40) 式より  $S_2, S_3, S_4, S_5$  を消去すると

$$\left. \begin{aligned}
 x_1(\tau) + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_3(\tau) - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} x_5(\tau) &= Q(\tau) \cos S_1 \\
 x_2(\tau) + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_4(\tau) - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} x_6(\tau) &= Q(\tau) \sin S_1
 \end{aligned} \right\} (41)$$

ただし

$$Q(\tau) = \frac{F}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau} - 1 + \alpha\tau) - \frac{W}{\beta^2} (e^{-\beta\tau} - 1 + \beta\tau) + l \quad (42)$$

と書いた

$y = (x_1, x_2)$ ,  $u = (x_3, x_4)$ ,  $v = (x_5, x_6)$  なる 2次元ベクトルを定義し, ベクトル  $y$  のノルムを  $\|y\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  とする。(41) 式からさらに  $S_1$  を消去すると

$$\left. \left\| y + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} u - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} v \right\|^2 = Q^2(\tau) \right\} (43)$$

あるいは

$$\left[ x_1 + \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_3 - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} x_5 \right]^2 + \left[ x_2 + \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_4 - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} x_6 \right]^2 = Q^2(\tau)$$

なる関係式が得られる。(43)式において  $y, u, v$  なるベクトルを与えると、(43)式は  $\tau$  に関する超越方程式である。この超越方程式の最小の正の実根を  $\tau(y, u, v)$  とおくと、 $\tau(y, u, v)$  は明らかにゲームの初期条件が  $x = (y, u, v) = (x_1, x_2, \dots, x_6)$  で与えられる場合のゲームの値である。すなわちこのゲームの値  $V(y, u, v)$  は、 $V(y, u, v) = \tau(y, u, v)$  で与えられる。

(42)式より、 $\tau$  が大きい場合には  $Q(\tau)$  は  $\{(F/\alpha) - (W/\beta)\} \tau$  なる直線に漸近する。こゝで

$$(F/\alpha) - (W/\beta) > 0 \quad (44)$$

と仮定しよう。(43)式で  $\tau=0$  の場合を考えると、左辺 =  $\|y\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ 、右辺 =  $l^2$  である。 $x_1^2 + x_2^2 > l^2$  であるから、(左辺) > (右辺) である。次に(43)式で  $\tau \rightarrow \infty$  の場合を考えると、左辺 = 有限値、一方(44)式の条件より右辺  $\rightarrow \infty$ 。したがって  $\tau \rightarrow \infty$  では(左辺) < (右辺) である。(43)式の左辺、右辺ともに  $\tau$  についての連続関数

であるから，上の条件より (43) 式の少なくとも一個の正根が存在することは明らかである。

#### 4. ゲームの完了条件

今までは，ゲームが完了すると仮定して，最適戦略，最適軌道の満足すべき必要条件を求めた。ここではゲームが完了するための条件について考察しよう。一般に次の三通りの場合が考えられる：

(I) ゲームの状態空間のどの点から出発してもゲームが完了する。すなわち  $E$  がどんな戦略を用いても，捕捉が起るような  $P$  の戦略が存在する。

(II) ゲームの状態空間のどの点から出発してもゲームは完了しない。すなわち  $P$  がどんな戦略を用いても，捕捉から免れるような  $E$  の戦略が存在する。

(III) ゲームの状態空間が二つの集合， $CZ$  と  $EZ$  とに分けられ， $CZ$  から出発したゲームは完了するが， $EZ$  から出発したゲームは完了しない。 $CZ$  を捕捉領域 (capture zone)， $EZ$  を回避領域 (escape zone) とする。

一般に  $M$  の利用部分の境界 (boundary of useable part) BUP では，最適軌道は  $M$  と接する。このように  $M$  と接して BUP に到達する最適軌道を Isaacs<sup>1)</sup> に従って barrier と呼ぶことにする。barrier は，(a) 互に交わることなく



無限に延びる場合, (b) 互いに交わる場合, (c) 交わることなく有限の点で終る場合, の三つの場合が考えられる。それぞれの場合を Fig. 2 に示している。Fig. 2 (a), (b) の場合には状態空間は barrier によって二つの部分に分けられる。しかもプレイヤーの最適な戦略の下では軌道は barrier と交差することはない。このことは微分方程式の解の唯一性から明らかである。したがって (a), (b) の場合には, 状態空間は barrier によって捕捉領域  $C$  と回避領域  $E$  とに分けられる。一方 Fig. 2 (c) の場合には barrier によって状態空間が分けられることはなく, ゲームの行なわれる状態空間は捕捉領域であると考えられる。いずれの場合にも, ゲームの値は barrier の両側において不連続的に変化する。

さて追跡・回避ゲームにおける BUP は, (31) 式よりパラメータによって

$$(s_2 - s_4) \cos s_1 + (s_3 - s_5) \sin s_1 = 0 \quad (45)$$

で与えられる。(40), (41), (45) 式を用いてパラメータ  $s_1, \dots, s_5$  を消去すると, barrier の満足すべき方程式:

$$\begin{aligned} & (x_3 e^{-\alpha\tau} - x_5 e^{-\beta\tau}) \left( x_1 + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_3 - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} x_5 \right) \\ & + (x_4 e^{-\alpha\tau} - x_6 e^{-\beta\tau}) \left( x_2 + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} x_4 - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} x_6 \right) \\ & = \left\{ \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\tau}) - \frac{W}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau}) \right\} Q(\tau) \quad (46) \end{aligned}$$

を得る。一方 barrier は (43) 式も満足することは明らかである。(43) 式の関係は

$$f(x, \tau) = f(x_1, x_2, \dots, x_6, \tau) = 0 \quad (47)$$

とおくと, (46) 式の関係は

$$\partial f(x, \tau) / \partial \tau = 0 \quad (48)$$

となっていることが, (43) 式から確かめられる。

$$C(\tau) = \{x \in R^6 : f(x, \tau) = 0\} \quad (49)$$

とおくと  $C(\tau)$  は 5次元曲面であり, ゲームの値  $\tau$  の等しい点の集合を表わしている。barrier は (47), (48) 式よりパラメータ  $\tau$  を消去した関係式で表わされる。このことから,  $C(\tau)$  の  $\tau$  を動かした場合の包絡面 (5次元曲面) が barrier であるという重要な結果を得る。

2次元ベクトルの内積を  $(\ , \ )$  で表わすと, (46) 式は

$$\left( e^{-\alpha\tau} u - e^{-\beta\tau} v, y + \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} u - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} v \right) = Q(\tau) Q'(\tau) \quad (50)$$

と書ける。(50) 式に Schwartz の不等式を用いると

$$|Q(\tau) Q'(\tau)| \leq \|e^{-\alpha\tau} u - e^{-\beta\tau} v\| \cdot \left\| y + \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} u - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} v \right\|$$

さらに (43) 式の関係を用いると

$$|Q'(\tau)| = \left| \frac{F}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\tau}) - \frac{W}{\beta}(1 - e^{-\beta\tau}) \right| \leq \|e^{-\alpha\tau}u - e^{-\beta\tau}v\| \quad (51)$$

なる関係を得る。

(51) 式の左辺は二つの指数関数と定数の和であるから、 $Q(\tau) = 0$  の根はたかだか 2 個である。また  $Q'(0) = 0$  であるから、(44) 式の条件を考慮すると、 $Q'(\tau)$  のグラフは Fig. 3 の (a) か (b) かのいずれかのようにになる。 $Q(\tau)$  のグラフは Fig. 3 (a), (b) の場合に対応して Fig. 4 (a), (b) のようになる。Fig. 4 (a) の場合には  $Q(\tau)$  は  $\tau = \tau_1$  において最小値をもつが、(b) の場合には単調に増加する。(51) 式において  $u, v$  を任意に固定して考えると、 $\tau = 0$  では (51) 式は明らかに成立しているが、 $\tau \rightarrow \infty$  においては (51) 式は成立しない。このことは、ある  $\tau_0 > 0$  があってその点で *barrier* が終ることを意味している。

$C(\tau)$  なる集合について更に考えてみよう。(43) 式から、 $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  の場合の  $C(\tau)$  の切り口は円であり、その中心の座標は  $x_1, x_2$  平面において  $y = -\left\{ (1 - e^{-\alpha\tau})/\alpha \right\} u + \left\{ (1 - e^{-\beta\tau})/\beta \right\} v$ , 半径は  $|Q(\tau)|$  である。 $\tau = 0$  では円の中心は原点にあり、半径は  $l$  であるが、 $\tau \rightarrow \infty$  では円の中心の座標は  $-(u/\alpha) + (v/\beta)$  なる点に収束し、その半径は (44) 式の条件の下では無限大

になる。

$F=2, \alpha=1, W=1, \beta=4, \ell=0.2$  にとった場合の  $Q(\tau)$  のグラフを Fig. 5 に示している。さらに  $u=0, v=(0, 2)$  にとった場合の  $y=(x_1, x_2)$  の軌跡を,  $\tau$  をパラメータとして描いたものが Fig. 6 である。Fig. 6 において *barrier* は円群の包絡線  $AB$  であり, 明らかに点  $B$  で終わっている。点  $A$  は  $M$  の利用部分の境界である。 $\tau < \tau_0$  なる  $\tau$  に対して  $Q(\tau_0) < Q(\tau)$  となり, かつ  $Q(\tau)$  を半径とする円が  $Q(\tau_0)$  を半径とする円を完全に含み始めるような  $\tau_0$  に対しては包絡線は描けなくなり, 従って *barrier* はそこで終止する。

以上の考察から, ゲームの状態空間の任意の点から出発してゲームが完了する(多様体  $M$  に到達する)ためには次の二つの条件が必要かつ十分である:

$$i) \quad C = \bigcup_{\tau \geq 0} C(\tau) \quad (52)$$

とおくとき,  $C$  なる集合が  $M$  とその内部を除いて全状態空間を覆う。

ii) *barrier* が交わらない。

i) の条件は  $u, v$  を任意に固定したときの  $C(\tau)$  の切り口が  $\tau$  を変えた場合に全  $x_1, x_2$  平面を覆うことであり,

$t \rightarrow \infty$  のとき  $Q(t) \rightarrow \infty$  の条件と一致す。この条件は (44) 式で表わされる。ii) の条件については,  $Q(t)$  がゼロになれば包絡線が交わるから, すべての  $t \geq 0$  について  $Q(t) > 0$  という条件があれば ii) の条件は満足される。

結局,

$$\left. \begin{array}{l} (F/\alpha) - (W/\beta) > 0 \\ \text{すべての } t \geq 0 \text{ について } Q(t) > 0 \end{array} \right\} \quad (53)$$

なる条件があれば, 任意の初期条件から出発したゲームは完了すると結論できる。barrier が交わる Fig. 2 (b) のような場合には, barrier で囲まれた内側ではゲームは完了するが, その外側では回避者 E が適当な戦略をとれば追跡者 P は全く捕捉することができない。

本文では完全情報ゲーム, すなわち互の運動を支配する方程式およびゲームの現在の状態を両プレイヤーは完全に知っていると仮定した。このような情報が部分的にしか知られていない不完全情報ゲームの研究は, 今後の問題として残されている。

### 参考文献

- 1) R. Isaacs : *Differential Games*, John Wiley (1965)
- 2) L. S. Pontryagin : *On some differential games*, *Soviet Math.*, Vol. 5, I, pp. 712-716 (1964)

- 3) L. S. Pontryagin : On the theory of differential games, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 21, No. 4, pp. 219 - 274 (1966)
- 4) L. S. Pontryagin : Linear differential games, in A. V. Balakrishnan & L. W. Neustadt (eds.), *Mathematical Theory of Control*, pp. 330 - 334, Academic Press (1967)
- 5) L. D. Berkovitz : A variational approach to differential games, in M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker (eds.), *Advances in Game Theory*, pp. 127 - 174, Princeton U. P. (1964)
- 6) L. D. Berkovitz : Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems, *J. SIAM Control*, Vol. 5, No. 1, pp. 1 - 24 (1967)
- 7) L. D. Berkovitz : A survey of differential games, in A. V. Balakrishnan & L. W. Neustadt (eds.), *Mathematical Theory of Control*, pp. 342 - 372, Academic Press (1967)

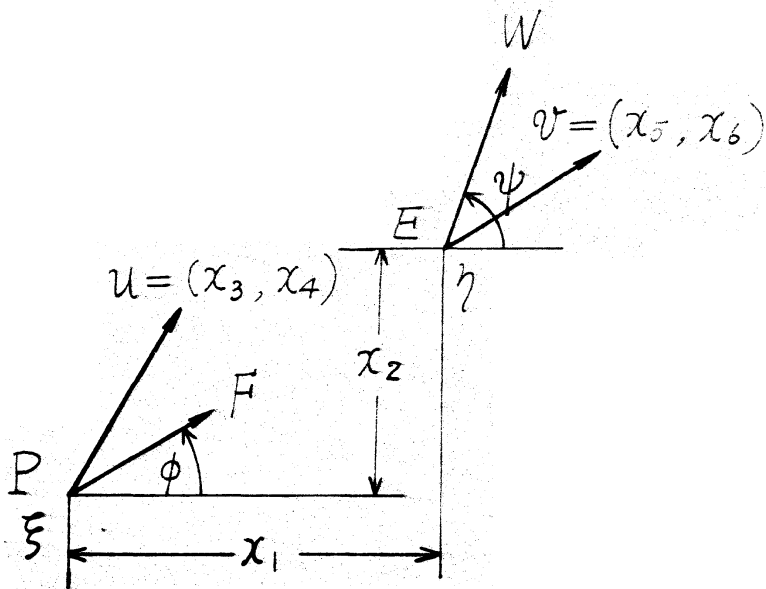


Fig. 1

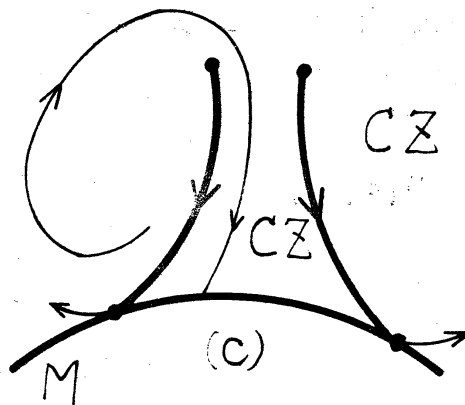
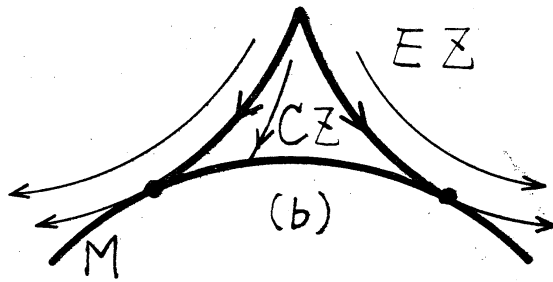
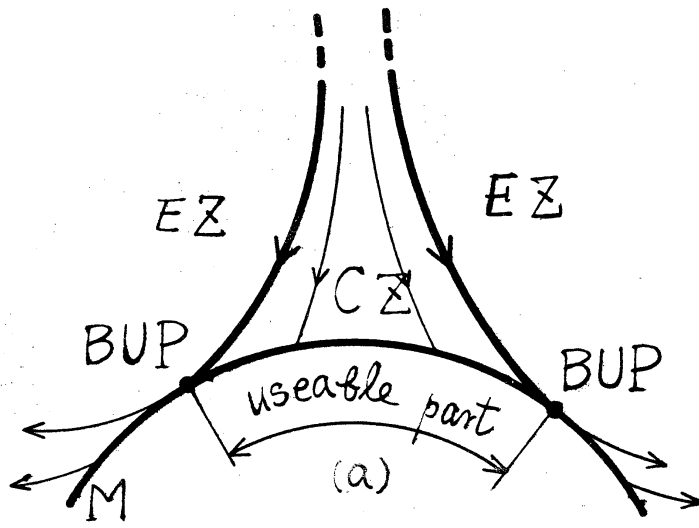


Fig. 2



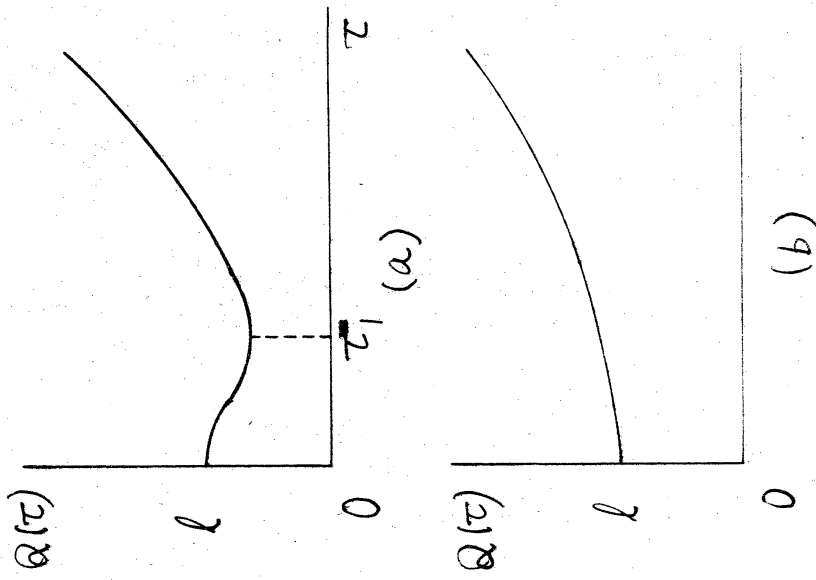


Fig. 4

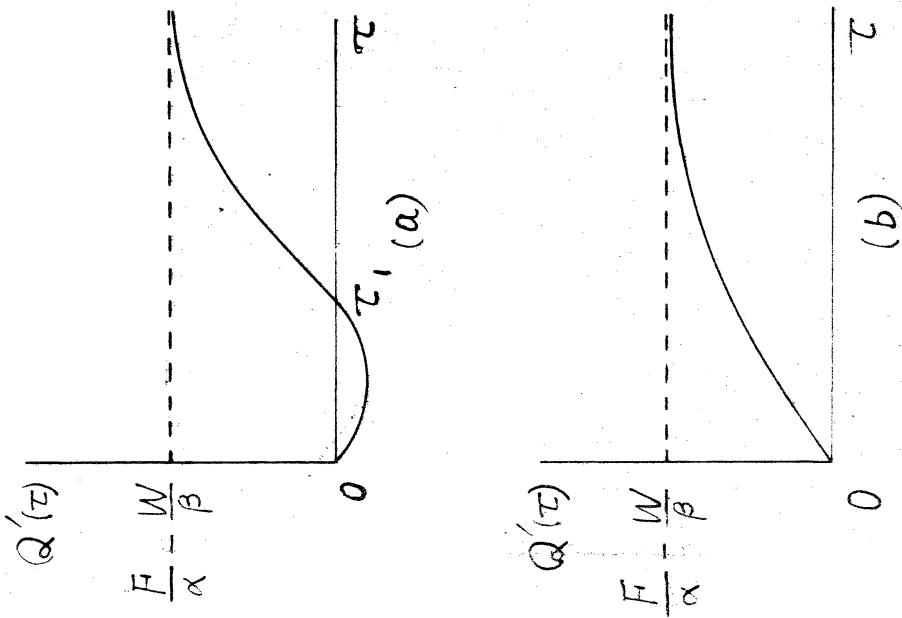


Fig. 3

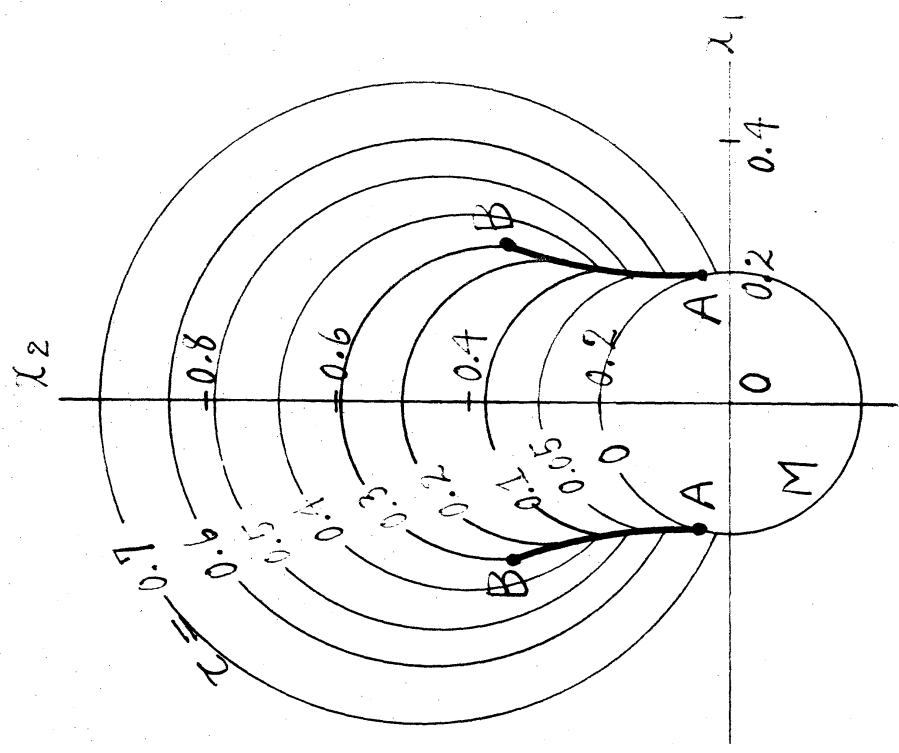


Fig. 6

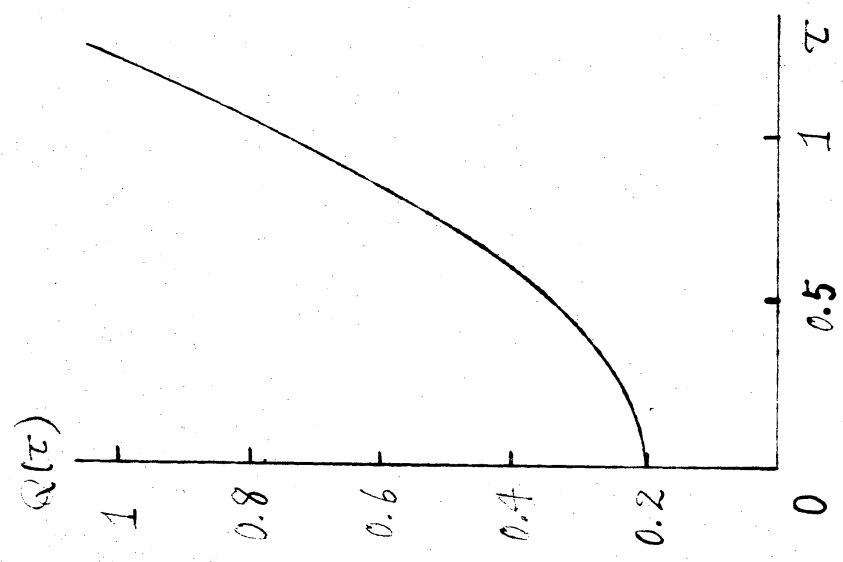


Fig. 5