数理解析研究所講究録
62巻 1968年 1-12

ある非線形問題について

東大 工　南雲 仁一
東大 工　吉澤 修治

I　非線形系における固有値問題

§1.1　序

能動素子が線路にそって分布している能動伝送線路には信号波形を整形する作用を持つものがある。すなわち，その能動線路に固有な波形があって，それは一定速度で伝播し，一般の信号波形は線路を伝播する間にこの固有波形に漸近する。この固有波形に対応する線路方程式の解は，ひとつの変数 $\tau = t - x/\theta$（t：時間変数，x：位置変数，θ：伝播速度）だけの関数であり，上記の固有波形に応ずる境界条件を満足する解が存在するような伝播速度 θ を求めることになる。この問題は非線形系に対するひとつの固有値問題ということができよう。すなわち，固有波形の伝播速度 θ が固有値に相当し，固有波形が固有関数に相当するとみなすことができ

よう。

§1.2 単安定線路

生体の神経線維における興奮の伝播をシミュレートしたつぎの方程式を考える[1].

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t\,\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \mu(1 - z + \varepsilon z^2)\frac{\partial z}{\partial t} + z \qquad (1.1)$$

$$\mu > 0 \;, \quad \frac{3}{16} > \varepsilon > 0$$

(1.1) が一定速度 (θ), 無歪で伝播する波形を解として持つならば，その解は $\tau = t - x/\theta$ だけの関数になるはずである．そこで

$$\xi(\tau) = z(x, t) \quad , \quad \tau = t - \frac{x}{\theta} \qquad (1.2)$$

とおくと (1.1) はつぎの常微分方程式になる．

$$\beta\xi''' - \xi'' - \mu(1 - \xi + \varepsilon\xi^2)\xi' - \xi = 0 \qquad (1.3)$$

ここで $\xi' = d\xi/d\tau$, $\beta = \theta^{-2} > 0$ である．

(1.3) は $\xi \equiv 0$ のただ一つの定常解をもつ．そこで (1.3) に対して θをいろいろ変えてみて境界条件：

$$\xi(-\infty) = 0 \quad , \quad \xi(+\infty) = 0 \qquad (1.4)$$

を満す解 ($\xi \neq 0$) を求めることが問題である．(1.3) の $\xi = 0$ における特性方程式は一つの正根 (λ_0) と二つの負の実根または負の実部をもつ複素根をもつから境界条件 (1.4) を満す解はつぎの初期条件：

$$\xi(0)=\Delta,\ \xi'(0)=\lambda_0\Delta,\ \xi''(0)=\lambda_0^2\Delta$$

（Δ：数値計算の最小きざみ）

に対して，$\xi(+\infty)=0$ となる解を求めればよい。

実際 $\mu=3$，$\varepsilon=0.1$ の場合には図1，図2に示すように二つのそのようなβが存在する．一方は $\beta \fallingdotseq 0.44488$ で安定な固有波形（図1）に対応するものである。これは初期-境界条件：

$$\begin{cases} z(x,0)=0, \quad z_t(x,0)=0 \\ z(0,t)=F(t)=\begin{cases} \dfrac{z_0}{2}\left(1-\cos\dfrac{2\pi t}{t_0}\right) & t_0 \geqq t \geqq 0 \\ 0 & t \geqq t_0 \end{cases} \end{cases}$$

に対する(1.1)の解が $t\to\infty$ のとき漸近する波形である．もう一つは $\beta \fallingdotseq 0.938$ で不安定な固有波形（図2）に対応し，閾値にそって伝播し，物理的には実現しないものである．

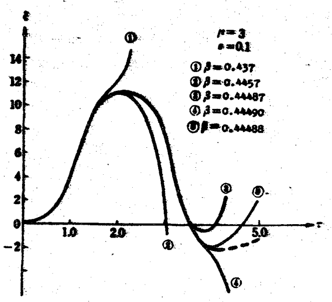

図1

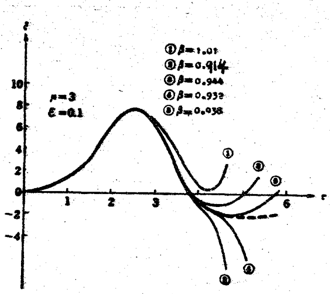

図2

§ 1.3 双安定線路

二つの安定状態を持った分布線路（燃焼のモデル）を考える．方程式は（1.5）で与えられる[2]．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u+1)(u-m)(u-1), \quad 0 \geqq m > 1 \qquad (1.5)$$

§1.2と同様に一定速度で伝播する解を求めるために（1.2）の変数変換を行うと（1.5）は

$$3\xi'' - \xi' - (\xi+1)(\xi-1)(\xi-1) = 0 \qquad (1.6)$$

となる．（1.5）は $u \equiv -1$, $u \equiv 1$ の定数解をもつ．そこで $u=-1$ から $u=1$ への転移の伝播と $u=1$ から $u=-1$ への転移の伝播に対応して（1.6）に対しそれぞれつぎの境界条件を考える．

$$\xi(-\infty) = -1 \quad , \quad \xi(+\infty) = 1 \qquad (1.7)$$

$$\xi(-\infty) = 1 \quad , \quad \xi(+\infty) = -1 \qquad (1.8)$$

境界条件（1.6）に対しては，解析的に解けて $\theta = -\sqrt{2}\,m$ のとき $\xi(\tau) = -\tanh(m\tau)$ となる．もとの (x, t) で書くとつぎの形になる．

$$u(x,t) = \tanh\left[-m\left(t + \frac{x}{\sqrt{2}\,m}\right)\right]$$

$m=0$ のときはこのような解は存在しない．また，境界条件（1.8）に対してはこのような θ は存在しないことが示される．

つぎに両方の転移が伝播する双安定線路を考えよう．方程式は次式で与えられる[2]．

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (3u^2 - 2mu + \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t} + (u-1)(u-m)(u+1)$$

$$\alpha > 0, \quad 0 \geqq m > 1, \quad 3 - 2|m| + \varepsilon > 0 \tag{1.9}$$

上と同様に(1.2)の変換を行うとつぎの常微分方程式を得る．

$$\beta \xi''' + (\beta - \alpha)\xi'' - (3\xi - 2m\xi + \varepsilon)\xi' - (\xi-1)(\xi-m)(\xi+1) = 0 \tag{1.10}$$

(1.9)は $u \equiv -1$，$u \equiv 1$ の定数解をもつ．そこで，つぎの4つの転移の伝播： $u=-1$ から $u=1$，$u=1$ から $u=-1$，$u=1$ から $u=1$（$u \not\equiv 1$ でない），$u=-1$ から $u=-1$（$u \not\equiv -1$ でない）に対応して，それぞれつぎの境界条件を考える．

$$\xi(-\infty) = -1, \quad \xi(+\infty) = 1 \tag{1.11}$$

$$\xi(-\infty) = 1, \quad \xi(+\infty) = -1 \tag{1.12}$$

$$\xi(-\infty) = 1, \quad \xi(+\infty) = 1 \tag{1.13}$$

$$\xi(-\infty) = -1, \quad \xi(+\infty) = -1 \tag{1.14}$$

これらの境界条件に対して§1.2と同様にして(1.10)を数値計算することができる．境界条件(1.11)と(1.12)に対する計算例を図3，図4に示す． $0 \geqq m \geqq -m_0$（m_0 はある正の数）のときは(1.11)，(1.12)の両方に解があるが，

$m < -m_0$ のときは (1.11) だけ解があり (1.12) にはない．すなわち，$u=1$ から $u=-1$ への転移は伝播しない．また，$0 \geq m \geq -m_0$ の範囲では (1.13) に対しては，二つの θ が存在し，一方は安定な固有波形に対応し，他方は不安定な固有波形に対応すると考えられる．(1.14) に対しては求めているような θ は存在しないと思われる．

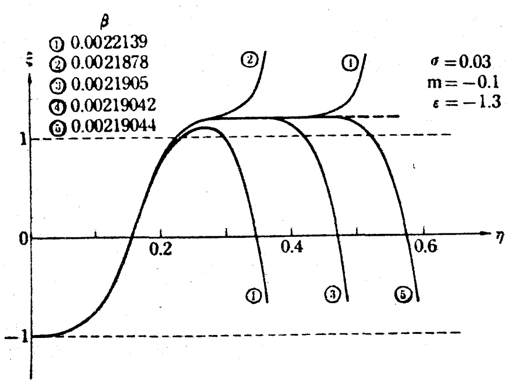

図 4

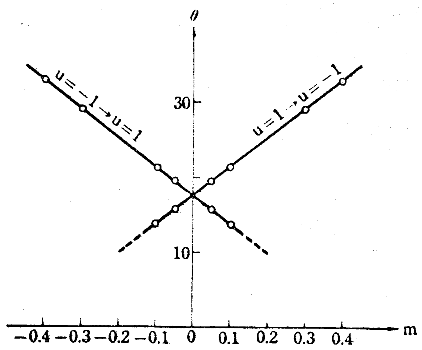

図5

§1.4 非安定線路

(1.15) で記述される非安定素子が分布した線路を考える．

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mu(1-z^2)\frac{\partial z}{\partial t} + z \qquad (1.15)$$

前と同様に，一定速度無歪で伝播する波形を求めるために (1.12) の変換をするとつぎの常微分方程式を得る．

$$3\xi''' - \xi'' + \mu(1-\xi^2)\xi' - \xi = 0 \qquad (1.16)$$

(1.16) に対する周期解を求めよう (これは線路を周期的な波形が一定速度で伝播してゆくことに対応している)．

そのためには，

$$\xi(0)=0,\quad \xi'(0)=\gamma,\quad \xi''(0)=\delta$$

として，(1.16)を解き，ある時刻 $\tau=T$（θによって変りうる）で

$$\xi(T)=0,\quad \xi'(T)=\gamma,\quad \xi''(T)=\delta$$

となるものを求めればよい。(1.16)の場合には，すべてのθに対してそのような解が存在するものと思われる。

つぎに，円周の長さがLの円状の線路を考えるとつぎの周期的境界条件が入る。

$$\xi(0)=\xi\left(\frac{L}{\theta}\right) \qquad (1.17)$$

このときは，すべてのβに対して(1.16),(1.17)の解が存在するのではなく，Lに対してあるβ（一つとは限らない）が定まり，これに応ずる波形だけが存在することになるものと思われる。

2　能動線路の閾作用について

神経線維の興奮を記述する方程式(1.1)に関する閾作用について考察する．(1.1)を一般化したつぎの方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} - g(u) \qquad (x>0,\ t>0) \qquad (2.1)$$

に対する初期値－境界値問題：

$$\begin{cases} u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=0 \qquad (x\geq 0) \\ u(0,t)=\varphi(t) \quad (t\geq 0)\ ,\ \varphi(t)\equiv 0 \quad (t\geq t_0) \\ \varphi(0)=0,\ \varphi''(0)=f(\varphi(0))\varphi'(0)+g(\varphi(0))\ ,\ \varphi(t)\in C^2 \end{cases} \qquad (2.2)$$

の大域的な解の存在は有馬，長谷川[3]によって，つぎの条件のもとで証明された．

$$\begin{cases} -K_1 \leq f'(u) \leq K_0\,(u^2+1) \\ |g(u)| \leq K_2\,(u^2+|u|) \\ G(u) = \int_0^u \{-g(z)\}dz \leq K_3 u^2 \\ g(u),\ f(u) \in C^1\ ,\ K_0, K_1, K_2, K_3 \text{ は正の定数} \end{cases} \qquad (2.3)$$

また山口[4]は $f(u)$ に対してつぎの条件を満す $c\ (>0)$ が存在するとき，任意のデータ $\varphi(t)\in C^2$ に対して(2.1)(2.3)の解 $u(x,t)$ は $t\to+\infty$ のとき一様に0に近づくことを示した．

$$u f(u) \geq c u^2 \qquad f(u) = \int_0^u f'(z)dz \quad c>0 \qquad (2.4)$$

ところでこの条件は $f'(u)=\mu(1-u+\varepsilon u^2)$ の場合には $\varepsilon > \frac{3}{16}$ と等価である．一方，伝播する波形をもつものは

$0<\varepsilon<\frac{3}{16}$ であるが，このときも一種のエネルギー に対する条件が満たされるとき $t\to+\infty$ のとき解は0に漸近することが示される5)． 以下，$f(u)=u(1-u+\varepsilon u^2)$，$g(u)=u$ の場合を考える．

まず(2.2)をつぎの形に表わす．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - f(u) - w \\ w_t = u \end{cases} \tag{2.5}$$

ここに　$w(x,t)=\int_0^t u(x,t)\,dt$，$f(u)=\int_0^u f(z)dz=u\left(u-\frac{u^2}{2}+\varepsilon\frac{u^3}{3}\right)$

である． このときSobolevの補題によりエネルギー形式

$$E_0(t)=\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(u^2+u_x^2\right)dx \tag{2.6}$$

に対して，正の定数 c が存在して

$$c\,E_0(t) \geqq \sup_{0<x<+\infty} |u(x,t)| \tag{2.7}$$

が成立つ． もう一つのエネルギー形式

$$E_1(t)=\int_0^\infty \left\{\frac{\lambda}{2}(u^2+w^2)+\frac{1}{2}u_x^2+u\,w+F(u)\right\}dx \tag{2.8}$$

を考える． ここに

$$F(u)=\int_0^u f(z)\,dz,\quad \lambda>\max\left\{2,\,2+\mu\left(\frac{1}{6}\varepsilon-1\right)\right\}$$

とする． また，$\alpha(\lambda)=\frac{3}{4\varepsilon}\left\{1-\sqrt{1-16\varepsilon\,(1-2/\lambda\mu)/3}\right\}$ とおくとつぎの結果が得られる．

「正の定数λが存在して，$|u(x,t_0)|<\alpha(\lambda)$，かつ，$E_1(t_0)<\alpha(\lambda)/c$ ならば，$\sup_{0<x<+\infty}|u(x,t)|$ は $t\to+\infty$

のとき0に近づく」

証明　$\lambda > 2+\mu(\varepsilon/6-1)$　から

$$E_1(t) \geqq E_0(t) \tag{2.9}$$

つぎに　$E_1'(t)$　を計算すると

$$E_1'(t) = \int_0^\infty \{\lambda(uu_t + wu) + u_x u_{xt} + wu_t + u^2 + f(u)u_t\}dx$$
$$= \int_0^\infty \{-\lambda(u_x^2 + f(u)u) - u_t^2 + u^2\}dx$$
$$\leqq -\int_0^\infty (\lambda u_x^2 + u^2)dx + \int_0^\infty (-\lambda u f(u) + 2u^2)dx$$

ゆえに

$$E_1'(t) \leqq -2E_0(t) + \int_0^\infty (-\lambda u f(u) + 2u^2)dx \tag{2.10}$$

ここで

$$-\lambda u f(u) + 2u^2 = -\lambda\mu u^2\left\{\frac{\varepsilon}{3}u^2 - \frac{1}{2}u + \left(1 - \frac{2}{\lambda\mu}\right)\right\}$$

となるから，　$u \leq \alpha(\lambda)$ のとき $-\lambda u f(u) + 2u^2 \leq 0$　である．

また (2.7) および (2.9) から

$$cE_1(t) \geqq \sup_{0<x<+\infty} |u(x,t)| \tag{2.11}$$

$t = t_0$ では仮定から $\sup_{0<x<+\infty} |u(x,t_0)| < \alpha(\lambda)$ であるから $E_1'(t) < 0$.

つぎにすべての $t\ (\geqq t_0)$ に対して $E_1'(t) \leqq 0$ を示す．もし $E_1'(t) > 0$ となる $t_1 > t_0$ が存在したとすると，そのような t_1 の下限を t_2 とすると，そこでは (2.11) と t_2 の定義から $\sup_{0<x<+\infty} |u(x,t_2)| = \alpha(\lambda)$ でなければならない．　したがって，そのとき $\int_0^\infty \{-\lambda u f(u) + 2u^2\}dx \leq 0$，$E_0(t_2) > 0$　であ

るから，(2·10) により $E_1'(t_2) < 0$ となり矛盾である．さらに，(2·10) の形から $E_1(t)$ は $t > t_0$ で強い意味で単調減少である．

結局，任意の $t \geqq t_0$ に対して $\sup_{0<x<+\infty} |u(x,t)| < \alpha(\lambda)$ が成り立つから，$E_1'(t) \leqq -2E_0 \leqq 0$．一方 $E_1(t) \geqq 0$ であるから $\lim_{t\to\infty} E_1'(t) = 0$，したがって $\lim_{t\to\infty} E_0(t) = 0$ を得る．これより (2·7) から $\lim_{t\to\infty} \sup_{0<x<+\infty} |u(x,t)| = 0$ を得る．

参考文献

1) J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa: "An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon", Proceedings of the Institute of Radio Engineers, vol.50, no.1, pp. 2061 – 2070, Oct., 1962

2) J. Nagumo, S. Yoshizawa, S. Arimoto: "Bistable Transmission Lines", Transactions on Circuit Theory of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, vol.12, no. 3, pp. 400 – 412, Sept. 1965

3) R. Arima, Y. Hasegawa: "On Global Solutions for Mixed Problem of a Semi-linear Differential Equation," 学士院記事，36巻，10号，1963

4) M. Yamaguchi: "The Asymptotic Behavior of the Solution of a Semi-Linear Partial Differential Equation Related to an Active Pulse Transmission Line" 学士院記事，36巻，10号，1963

5) 吉沢修治，北田泰彦："能動線路の閾作用について"，電子通信学会非直線理論研究会資料，1968年6月