

ある種の楕円曲面上の有理二次型式の周期について

東大・理

菅倉 俊夫

§1 序論

古典的に良く知られている楕円 modular 函数あるいは超幾何函数の理論を拡張する事は、現在の代数幾何学及び関連する分野に於いて ~~最も~~ 重要な問題の一つである。既に Abel 多様体の modulus の理論が保型函数(多変数)と密接に関連した形で成果を収めた事は良く知られている。この小論では、小平-Kas (以下全て敬称を省略させて頂く)により研究された楕円曲面の内のある型のものについて、その有理二次型式の周期を period (楕円曲面を定義する定義方程式の係数)の函数として考え若干の結果を記す。周知の様楕円 modular 函数は、代数的不変量 $'i'$ と解析的不変量 $'\tau'$ を結びつける函数であるが、 alg. Invariant $'i'$ を $\text{Analytic Invariant}$ $'\tau'$ の函数と考えるか、 $\text{Analytic Invariant}$ $'\tau'$ を $\text{algebraic Invariant}$ $'i'$ の函数と考えるかで立場は異なる。前者は一般に楕円 modular 函数と呼ばれるものであるが後者の立場を強調すれば、超幾何函数と呼ばれる種類の函数に達する。

Abel 多様体の modulus は勿論前者の立場を取って取扱われた

が、ここぞは楕円曲面上に於いて逆の問題から問題を考える。

そしてこの様な立場から一変数函数論にその範を求めれば、楕円 modular 函数よりも寧ろ一変数超幾何函数が現われる。従ってこの小論の主目的は、一変数超幾何函数論の初期に於いて知られていた事実に相当する結果の幾つかを楕円曲面の系に対して見出す事にある。

(注) 筆者は、1968年の微分幾何学 Symposium で殆んど同じ題の Report を提出したが、ここにはその後の結果を中心に記述する。また詳細は論文の形で提出する予定であるので、要約を記する事にしたい。

§2. 一変数超幾何函数論よりの引用

見 KLEIN [1] に基いて、(一変数)超幾何函数論の歴史の若干を引用する。Euler-Gauss の時代に於いて、超幾何函数の次の三種類の表現方法が知られていた。

- | | | | |
|-------|---|---------------|---|
| (2.1) | { | (1) 巾級数展開 --- | <i>Hypergeometric series</i> |
| | | (2) 微分方程式 --- | <i>Hypergeometric differential equation</i> |
| | | (3) 定積分表示 --- | <i>Eulerian integral</i> |

Euler-Gauss がこの三種類の表現法を何れに基本的と見なしたかは尙論ずる事は出来ないが、これらの表現は、後の理論の発展に於いてその役割を果たした。またこれらの表現から問題が生じた様に思われる。既に (順序を逆にして述べた) (注)

(3) Eulerian integral は, Riemann Schwarz の三葉: 写像 (1-写像) に於いて基本的な役割を果たした。また Hypergeometric differential equation は Kummer の仕事 (相異なる超幾何函数を相互に比較する事) に於いて一定の役割を果たした。また所謂 Fuchs 型の微分方程式論や Riemann の問題に対してこの微分方程式は出発点となった事は良く知られている。その他にも Siegel の超越数の理論の中に、超幾何微分方程式が出发点とするものがある様である。etc. -----

我々は、この三通りの表示を楕円曲面の系列上の周期函数に対して求める事を問題とするのであるが概略次の段階に到達したのである。

(1) 中級数展開については、一応最低限の結果迄には到達した。但し我々が得た中級数展開は通常点に於いてなされたものであり、特異点に於ける級数展開をも考慮するべきかも知れぬ。尚(変数又は多変数)超幾何函数の中級数展開は一つの解に対してのみ直接的に与えられるのに比し、我々の級数展開は全ての解に対して与えられている事を注意しておく。

(2) 微分方程式系を尚 explicit な表示に至ってはいないとは言え、既に一応の level に到達した。

(3) ~~中級数~~^{定積分} 表示については、周期函数は勿論定積分表示を有する訳であるが、然し超幾何函数の場合の様に有用であるか否かは現在判定し難い。

§3. 中級数展開:

さて我々の問題とする楕円曲面は affine surface (3.1) の

completion とし て得 ら れ る . (以下 $B^{\mathbb{R}}$ と 記 す .)

$$(3.1) \quad y^2 = 4x^3 - g_{4\mathbb{R}}(u)x - h_{6\mathbb{R}}(u).$$

($g_{4\mathbb{R}}(u), h_{6\mathbb{R}}(u)$ は 夫 夫 4 次 次, 6 次 次 の 多 項 式 .)

こ れ の 楕 圓 曲 面 の 性 質 の 内 史 要 な 事 柄 を 引 用 す る .
'判別式' $D_{\mathbb{R}}(u)$ を .

$$(3.2) \quad D_{\mathbb{R}}(u) = g_{4\mathbb{R}}^3(u) - 27h_{6\mathbb{R}}^2(u)$$

に よ り 定 義 す る . そ し て 以 下 に 於 け て は $D_{\mathbb{R}}(u)$ は 重 根 を 持 持
な い も の と す る . ま た . 写 像 $(u, x, y) \rightarrow (u, x)$ に 関 し て の

分岐曲線: $y=0$ を $X_{\mathbb{R}}$ と 置 く . ま た $X_{\mathbb{R}}$ に の ち pole を 有 す る 有 理 二
次 型 式 $\omega_{\mathbb{R}}^{(p,q)}$ を $\omega_{\mathbb{R}}^{(p,q)} = \frac{u^p x^q}{y} du dx$ に よ り 定 義 す る .

$B^{\mathbb{R}}$ の geometric genus (= $\dim H^0(B^{\mathbb{R}}, \Omega^2)$): $P_g(B^{\mathbb{R}}) = g-1$, であり .
微分型式 $\omega_{\mathbb{R}}^{(p,q)} = \frac{u^p}{y} du dx$ ($p=0, 1, \dots, g-2$) の basis を な す .

ま た first Betti number, 及 second Betti number b_1 は 夫 夫 .

$$b_1(B^{\mathbb{R}}) = 0, \quad b_2(B^{\mathbb{R}}) = 2g-2 \text{ である .}$$

多項式 $g_{4\mathbb{R}}(u), h_{6\mathbb{R}}(u)$ を 夫 夫 explicit に .

$$g_{4\mathbb{R}}(u) = \tau_{4\mathbb{R}} u^{2g} + \tau_{4\mathbb{R}-1} u^{2g-1} + \dots + \tau_1 u + \tau_0,$$

$$h_{6\mathbb{R}}(u) = \sigma_{6\mathbb{R}} u^{3g} + \sigma_{6\mathbb{R}-1} u^{3g-1} + \dots + \sigma_1 u + \sigma_0.$$

形 に 表 わ す . そ し て 以 下 $B_{\mathbb{R}}^{\tau}, X^{\tau} \dots$ を $B^{\mathbb{R}}(\tau, 0), X^{\mathbb{R}}(\tau, 0), \dots$ と

す . 問 題 は $(\tau, 0)$ の 函 数 と し て 微 分 型 式 $\omega_{\mathbb{R}}^{(p,q)}$ の 周 期 を 考
事 だ ら っ た .

記号の簡単の為に微分型式 $W_{\mathbb{R}}^{p,q,r}$ を一般に $W_{\mathbb{R}}(\tau, \sigma)$ で表わす。また surface $B_{\mathbb{R}}(\tau, \sigma)$ 上の 2-cycle を $J(\tau, \sigma)$ で表わす。また $\gamma(\tau, \sigma)$ は parameter (τ, σ) に連続的に depend するものとする。また周期函数 $W_{\mathbb{R}}^{p,q,r}(\tau, \sigma) = \int_{J(\tau, \sigma)} W_{\mathbb{R}}^{p,q,r}$; を一般に $W_{\mathbb{R}}(\tau, \sigma)$ で表わす。 $W_{\mathbb{R}}^{\pm}(\tau, \sigma)$ は一般に (τ, σ) に対しては (個) 正則函数でありまた "微分と積分の交換" $\partial_{\tau} W = \int \partial_{\tau} W$, $\partial_{\sigma} W = \int \partial_{\sigma} W$; も成立する。($\partial_{\tau} W, \partial_{\sigma} W$ は W を (x, y, τ, σ) に depend するとして τ, σ によって偏微分を行なうものとする。) parameter space $\mathbb{C}^{2k+1}(\mathbb{C}^k)$ 内に一点 $P_0 = (1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0, 1)$ を定め、一定 P_0 に対して中級数展開を行なうのであるが、"微分と積分の交換則" より P_0 に対応する Fermat 型の曲面 $B_0: y^2 = Ax^3 - (x^{2k} - 1)$ 上の有理型式の周期を知らば充分であるが、この事は(必要な範囲で)可能である。(詳細は省略として頂くが次の事柄が重要である)

$\mathbb{C}D(\sigma = (u, x, y) \rightarrow (\zeta_2^k u, \zeta_3^k x, (-1)^k y))$ は automorphism が存在するが、 $\sigma_{\text{can}} \in H_2(B_0)$ への作用を explicit に知る事が出来る。(Phan (1) の結果は affine surface に対して行なわれたが、他の場合は、compact surface であり、相異なる。))

(II) (1) の結果を参考にして計算すると、全この周期は、

$$\sum_{\mathbb{Z}/2} \beta_{\mathbb{Z}/2} \left(\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{4x^2-1}} dx \right) \times \left(\int_0^1 \frac{y^k}{\sqrt{4y^2-1}} dy \right) \quad \beta_{\mathbb{Z}/2} \in \mathbb{Q}(\zeta_6) ;$$

なる形の一次結合として表えられる。

精組は ~~本~~ を参照.

これらの結果より得られる応用を述べる:

X の微分型式 $W_{\#}^{(R, \sigma)}$ に対して "period map" $\eta_{\#}^P: B(\sigma) \rightarrow \mathbb{P}_{2n-3}(\mathbb{C})$ を次式により定める

$$(3) \quad \eta_{\#}^P(B(\sigma)) = \left(\int_{\gamma_1}^{R, \sigma} W_{\#}^{(R, \sigma)}, \dots, \int_{\gamma_{2n-3}}^{R, \sigma} W_{\#}^{(R, \sigma)} \right)$$

然らば, 中級数展開の explicit 方式を用いて次の結果を得る.

$$(III) \quad \text{Rank } \eta_{\#}^P(B(\sigma)) = 10n - 1 \quad (\text{一回微分すればよい})$$

(IV) $\{ \eta_{\#}^P(B(\sigma)) \}_{\substack{B(\sigma) \in \mathbb{C}^{(2n-3) \times 1} \\ \dots}}$ は $\mathbb{P}_{2n-3}(\mathbb{C})$ の如何なる Hypersurface にも含まれない.
(= 一回微分の結果より出る.)

この事実より更に, 次の諸結果も出る.

(V) "局所的に" 周期の値 $\eta_{\#}^P$ は, 楕円曲面の構造を classify する.

(VI) $B(\sigma)$ の Ricard 数 $\rho(B)$ は $2 \leq \rho(B) \leq 10n - 3$ の範囲の全ての値を取る.

(VII) $W(\sigma)$ は線型 n 階の偏微分方程式の complete resolution

をなす。

以上が主なる結果であるが、尚中級教展開を与える事の意義として興味を抱き得る可能性を持つ ~~可能性のある~~ ^{かも知れない} 多重数列を得る事にも求められないであろうか？ この点については筆者自身立入った考察を下した事が無いのであるが一応の希望として記しておきたい。

§4. 連立偏微分方程式系

§4の項目(Ⅳ)に於いて、我々が主題としている“周期函数”は、ある種の線型(階)偏微分方程式系を満たす事を記した。この節ではこの微分方程式系(以下この様に略記する)に関して若干の考察を ^試 する。まず P.A. Griffiths が示した様に、ある種の(この言いは不鮮明であるが、P.A. Griffiths 自身の述べ方も今の所手元にある Preprint では不鮮明ではある。尤も尚我々の場合は簡単に check 出来る。)条件の下に、“周期函数”はその特異点に於いて“regular”である。既に(簡単の為に \mathbb{C}^n の \mathbb{R}^n における ^{局所的に} 特異 divisor であるとして)、周期函数 W は、

$$(2.1) \quad \lim_{|z_i| \rightarrow 0, \arg z_i = \text{bdd.}} |z_i|^{M_i} |W| = 0 \quad (\text{for some positive number } M_i).$$

を満たす。他方常微分方程式 $(\mathbb{C}^n, 0)$ の近傍で定義されている

$$(2.2) \quad \frac{d^N F}{dz^N} = \sum_{j=0}^{N-1} P_j \cdot \frac{d^j F}{dz^j};$$

の解全体が“regular”である場合には、係数 $P_j \in \mathbb{C}^{N-j}$ が正則である

事が必要充分である。これらの結果から偏微分方程式系についても微分方程式の係数の満たすべき "Condition of regularity" が問題となってくる訳であるが、その必要充分条件を求める事も可能である。

$\mathbb{C}^n \supset D$ を $D = \{ |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < \delta; \delta > 0 \text{ 十分小} \}$ で定義される球状領域とし、特異 variety を $z_i = 0$ とする。同様の線型偏微分方程式系 (\tilde{R}) の解空間を \tilde{S} とし、 \tilde{S} の次元を f とする。

そして $(z_1, \dots, z_n) \in \{ |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < \delta \}$ を固定する時、 \tilde{S} は f 個の (z_i) の函数として f 次独立な函数を含むものとする。然るば、 \tilde{S} は次の常微分方程式の解空間と一致する。

$$\frac{dF}{dz_1} = P_1 \frac{dF}{dz_1} + P_2 \frac{dF}{dz_2} + \dots + P_n \frac{dF}{dz_n} + P_{f+1}$$

(P_1, P_2, \dots, P_{f+1} は $\mathbb{C}^n - D$ に於ける一価正則函数)

この時 "condition of regularity" は、

(\tilde{R}) $P_1 z_1, P_2 z_1^2, \dots, P_{f+1} z_1^f$ が全て正則なる形に述べらる。

この結果及び Griffiths の結果から指すの偏微分方程式系の係数の pole の order に制限が付けられる事は容易に確かめられるが、然し乍らこの結果のみより付けられる制限は極めて弱い結果しかもたらさぬ。他方特異 variety の近傍に於ける挙動

と微分方程式の係数の間には当然密接な関係がある筈であるが、特異 variety に於ける周期函数の挙動については 'condition of regularity' 以外の知識が必要であると予想される。この点については局所論の段階に於いて我々の知識は未だ不十分である。また議論を大域化する為には、parameter space の大域的な性質(その中には局所特異 variety の性質も含まれる)に関する何等かの知識が必要であることが現在の所立入った議論は行っていない。以上を極めて不十分ではあるが、特異 variety の近傍での挙動についての考察を打切って、微分方程式系の係数に関して相異なる側面から考察を加える事にする。まず最初に簡単な代数的な演算により、係数は幾つかの微分型式 ω_i に関しての周期行列 $\Omega = (\omega_{ij})$; $\omega_{ij} = \int_{\gamma_j} \omega_i$ の行列式を用いて書き表わせる事がわかる。さて行列 Ω の係数そのものは周期関数に他ならないが、次式により定義される行列 $X = (x_{ij})$

$$X = \Omega \cdot (I)^{-1} \cdot \Omega \quad ; \quad (I : \text{cycles } \gamma_j \text{ に関しての交差行列})$$
 の係数を explicit に定める事が出来る。そして係数 x_{ij} は parameter (t, ω_i) に関しての代数函数となる。この様にして問題は一応代数的な問題に定着出来るが行列 X の行列式を正確に求める事には成功していない。恐らくその為には特異 variety の大域的な性質を知る事が必要であろう。(これらの結果を述べる為にはかなりの準備を必要とするので割愛させて頂く。詳細は

近刊の拙論参照) 尚 $X = \Omega^T I^T \Omega$ を explicit に求める事は, 一変数の代数函数論に於いて Legendre の関係式の名で知られている関係式の拡張とみなされ基本的な関係式である。

(*) この過程は楕円曲線 $E: y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ 上の周期 $W(\lambda)$ の微分方程式: $y^{(2)} = \frac{P_1(x)}{\lambda(x-1)} y^{(1)} + \frac{P_2(x)}{\lambda(x-1)}$ について次の考察を加える事に相違する。まず楕円曲線 E 上の二つの一次独立な一次元 cycle を γ_1, γ_2 とすれば, $W_1(\lambda), W_2(\lambda) = \int_{\gamma_i} \frac{dx}{y}$ は λ の函数として一次独立である。そして, 所謂 Gauss の微分方程式の係数は,

$$\begin{bmatrix} W_1^{(2)} \\ W_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^{(1)} & W_1(\lambda) \\ W_2^{(1)} & W_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1/\lambda(x-1) \\ P_2/\lambda(x-1) \end{bmatrix} \text{ により決定される。}$$

他方, 行列 $\widetilde{W} = \begin{bmatrix} W_1^{(1)} & W_1(\lambda) \\ W_2^{(1)} & W_2(\lambda) \end{bmatrix}$ に関しては, 次の形の双一次関係式が成立する。

$$\widetilde{W} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \widetilde{W}^T = \begin{bmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) \\ \lambda(\lambda-1) & 0 \end{bmatrix}, \text{ -----}$$

この関係式より係数は explicit に決定される。

§ 5 結び

以上が我々の得た結果の主要部であるが, 勿論周期函数は他の多くの代数的多様体の系列に対しても考察されるべきである。その為には我々の得た幾つかの公式を拡張する事儘まず必要であるが, 更に他の型の問題として, Parameter space の

性質に関して現在我々の知る所は殆んど無いと言つて良いであらう。そして代数多様体の *modulus* の理論就中その中で我々が最も重要と考へてゐる周期函数の理論はこの点に負う所が大きいと思われり。 (小久)