

# Algebraic cycles

## — 高次 Jacobi, Picard 多様体 —

東大理 諏訪立雄

1952年に A. Weil [10] は、高次 Jacobi 多様体を定義し、それを中間次元の代数的サイクルの研究に用いることを提唱している。その後この方面の進歩は全くないと言ったが、最近 D. I. Lieberman は Weil の考えを発展させ、又 P. A. Griffiths は Weil の Jacobian を modify したものを採用することを試みている。以下は Lieberman [7][8], Griffiths [3] を中心としてまとめたものである。

### §0 準備

$V$  を複素数体上の非特異射影的代数多様体 ( $n$ 次元) とし、 $\mathcal{Z}(V)$  を  $V$  上の代数的サイクル (i.e.  $V$  の既約部分多様体の整係数の形式和) 全体の群を表わす。  $\mathcal{Z}(V)$  は余次元又は次元で次数がけられた加群である。以後余次元は上つき、次元は下つきで表わす ( $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}^{n-k}$ )。  $V, T$  を非特異代数的多様体、  $Z \in \mathcal{Z}(T \times V)$  とするとき、

$\{\Sigma(t) = \pi_V(\Sigma \cdot (t \times V)) \mid t \text{ は } \Sigma \cdot (t \times V) \text{ が定義される } T \text{ の点}\}$   
 (ただし  $\pi_V : T \times V \rightarrow V$  は射影) を  $T$  でパラメータづけら  
 れた  $V$  のサイクルの代数的族という。

定義 1.  $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$  とするとき,

i)  $X$  と  $Y$  とが代数的に同値 ( $X \sim_a Y$ )

$\Leftrightarrow X, Y$  が同一の代数的族に属する,

ii)  $X$  と  $Y$  とが torsion 同値 ( $X \sim_t Y$ )

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \quad kX \sim_a kY,$

iii)  $X$  と  $Y$  とが有理同値 ( $X \sim_r Y$ )

$\Leftrightarrow X, Y$  が射影直線  $\mathbb{P}^1$  でパラメータづけられた代数的族に  
 属する。

$\sim_*$  以上のいずれかの同値関係とするとき,  $\mathcal{Z}_*(V) = \{\Sigma \in \mathcal{Z}(V) \mid \Sigma \sim_* 0\}$ ,  $\mathcal{O}_* = \mathcal{Z} / \mathcal{Z}_*$  と書く。代数的サイクルの  
 交叉積から誘導された積により,  $\mathcal{O}_* = \mathcal{Z}^* / \mathcal{Z}_*^*$  は次数づけら  
 れた環である。特に  $\mathcal{O}_r$  はいわゆる Chow 環 ([1][9] 参  
 照)。

定義 2.  $A$  は Abel 多様体,  $r \in \mathcal{Z}_a(V)$  から  $A$  の準同  
 型写像とす。任意の  $\mathcal{Z}_a(V)$  に属するサイクルの代数的族  
 $\Sigma(t)$  ( $\Sigma \in \mathcal{Z}(T \times V)$ ) に対し,  $T$  から  $A$  の正則写像  $\varphi$  が  
 いて,  $\Sigma(t)$  が定義される点  $t \in T$  で  $\varphi(t) = r(\Sigma(t))$  なる

ときを解析的という。

$R$  が解析的ならば明らかに  $\ker h \supset Z_r(V)$ 。

### §1. 種々の高次 Jacobi, Picard 多様体.

まず実ト-ラス

$$(1) \quad H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) / \text{im} H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$$

(ただし,  $\text{im} H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$  は自然な準同型写像  $H^{2g-1}(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  の像.)

上に2通りの複素構造を考へる。自然な分解

$$H^p(V, \mathbb{C}) = \sum_{r+s=p} H^{r,s}(V)$$

に於いて,  $\varphi \in H^p(V, \mathbb{R}) (\subset H^p(V, \mathbb{C}))$  ならば,  $\varphi$  の  $(r, s)$

成分は  $(s, r)$  成分と互に複素共役であるから実ベクトル空間

としての同型

$$H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \simeq \sum_{\substack{r+s=2g-1 \\ (r,s) \text{ または } (s,r) \\ \text{のうちの一方}}} H^{r,s}(V)$$

を得る。右辺は複素ベクトル空間であるから, この様な同型

により  $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  上の複素構造が定義できる。

定義3. i)  $T^g(V)$  (Griffiths) : 同型

$$(2) \quad H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \simeq \sum_{\substack{r < s \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V)$$

によ, 2つをさし出す実ト-ラス (1) 上の複素構造。

(1)  $J^g(V)$  (Weil) : 同型

$$(2) \quad H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \cong \sum_{\substack{s \equiv g \pmod{2} \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}$$

よ、これとよびから実トーラス (1) 上の複素構造.

注意 1)  $P_{r,s} : H^p(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^{r,s}(V)$  ( $r+s=p$ ) を  $(r,s)$  成分への射影とし,  $C = \sum_{r,s} i^{r-s} P_{r,s}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) とすると,  $J^g(V)$  は  $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  上の複素構造 -  $C$  に対応する複素トーラスで,  $T^g(V)$  は  $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  上の複素構造

$$\sum_{s=2g-1} i^{\frac{s-r}{2}} P_{r,s} \text{ に対応する複素トーラスである.}$$

2)  $J^g(V)$  は Abel 多様体であるが,  $T^g(V)$  は一般にはそうではない.

3)  $T^1(V) = J^1(V) = H^{0,1}(V)/H^1(V, \mathbb{Z})$  は Picard 多様体,  $T^n(V) = J^n(V) = H^{n-1,n}(V)/H^{2n-1}(V, \mathbb{Z})$  は Albanese 多様体である.

4)  $T^g(V)$  は  $V$  に holomorphic によるが,  $J^g(V)$  は一般にはそうではない (§4 参照, 後者の反例は例えは Griffiths [2] I pp. 588-589 参照)

$$(5) \quad \sum_{\substack{r < s \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V) \text{ 又は } \sum_{\substack{s \equiv g \pmod{2} \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V) \text{ の Poincaré dual 即ち } \sum_{\substack{r < s \\ r+s=2g-1}} H^{n-r, n-s}(V) \text{ 又は } \sum_{\substack{s \equiv g \pmod{2} \\ r+s=2g-1}} H^{n-r, n-s}(V)$$

とする. さらに  $\omega^1, \dots, \omega^m \in \mathcal{S}(CH^{2n-2g+1}(V, \mathbb{C}))$   
 の基底 (を代表する形式) とし,  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m} \in H_{2m-2g+1}(V, \mathbb{Z})$   
 の Betti 基底とする.  $P$  を  $\pi_\nu = \left( \int_{\gamma_\nu} \omega^1, \dots, \int_{\gamma_\nu} \omega^m \right)$  ( $\nu=1, \dots, 2m$ )  
 で生成される  $\mathbb{C}^m$  の部分群とすれば, これは  $\mathbb{C}^m$  の格子で,  
 $T^\delta$  または  $J^\delta$  は複素トーラスとし  $\mathbb{C}^m/P$  と同型 (ただし, ち  
 たら  $T^\delta$  のときは  $S = \sum_{\substack{r+s=2g-1 \\ r \leq s}} H^{n-r, n-s}$ ,  $J^\delta$  のときは  $S =$

$$\sum_{\substack{S \equiv 1(2) \\ r+s=2g-1}} H^{n-r, n-s} \text{ とする.})$$

次に写像  $\varphi^\delta: \mathcal{Z}_a^\delta(V) \rightarrow J^\delta(V)$  または  $T^\delta(V)$  を定義する.  
 $Z \in \mathcal{Z}_a^\delta$  は 0- homologous であるから,  $2n-2g+1$   
 $\chi \in \mathbb{C}$  が存在して  $\partial C = Z$ .  $\xi = \tau \int_C \omega^\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, m$ )  
 を注意 4) と同じとすれば,

$$\varphi^\delta(Z) = \left( \int_C \omega^1, \dots, \int_C \omega^m \right) \pmod{P} \text{ と定義する.}$$

$$\partial C' = \partial C = Z \text{ ならば } \int_C \omega^\alpha - \int_{C'} \omega^\alpha = \int_{C-C'} \omega^\alpha \in P$$

であるから  $\chi \in \mathbb{C}$  のとり方ははよぶが,

$$\int_C \omega^\alpha + d\tau^\alpha = \int_C \omega^\alpha + \int_{\partial C} \tau^\alpha = \int_C \omega^\alpha + \int_Z \tau^\alpha$$

より分るようには, コホモロジー類の代表  $\omega^\alpha$  のとり方はよ  
 ぶてしまおうが,  $T^\delta$  のときは, コホモロジー類だけできま

これが示される。なお  $\varphi^{\delta}$  は解析的である (§2 定理を参照)

最後に Picard 多様体の持つ *universality* に注目した Lieberman の高次 Picard 多様体について記す。

定義 4.  $\mathcal{Z}_{\text{reg}}(\mathcal{V}) = \{X \in \mathcal{Z}_a(\mathcal{V}) \mid \forall Y \in \mathcal{Z}_a(\mathcal{V}) \text{ から Abel 多様体 } \mathcal{A} \text{ の解析的準同型写像 } \psi \text{ に対し } \psi(X) = 0\}$  とし、  
 $X, Y \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$  が *regularly equivalent* ( $X \sim_{\text{reg}} Y$ )  
 $\Leftrightarrow X - Y \in \mathcal{Z}_{\text{reg}}(\mathcal{V})$

と定義する。  $G(\mathcal{V}) = \mathcal{Z}_a(\mathcal{V}) / \mathcal{Z}_{\text{reg}}(\mathcal{V})$  を (全) Picard 群と  
いう。  $\mathcal{Z}_{\text{reg}}$  は  $\mathcal{Z}_a$  の次数つき部分群であるから、 $G(\mathcal{V})$  は自然に次数がけられる。  $G^{\delta}(\mathcal{V}) = \mathcal{Z}_a^{\delta} / \mathcal{Z}_{\text{reg}}^{\delta}$  を  $\delta$  次 Picard 群という。

定義 5. 次の条件を満たす組  $(\text{Pic}^{\delta}(\mathcal{V}), \varphi)$  を  $\mathcal{V}$  の  $\delta$  次 Picard 多様体という：

- i)  $\text{Pic}^{\delta}(\mathcal{V})$  は Abel 多様体、
- ii)  $\varphi \in \Omega_{\mathbb{C}}^{\delta}(\text{Pic}^{\delta}(\mathcal{V}) \times \mathcal{V})$  (Poincaré 類という)

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^{\delta}(\mathcal{V}) & \rightarrow & G^{\delta}(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & \mapsto & \varphi(t) - \varphi(0) \end{array}$$

が群としての同型写像

注意  $\delta$  次 Picard 多様体は一般に存在するかどうか分らない。  $\delta = 1$  のときは  $\mathcal{Z}_{\text{reg}}^1 = \mathcal{Z}_r^1$  で、古典的な Picard 多

多様体 (と Poincaré divisor の組) が 1 次 Picard 多様体である. ([5] p120 以下 および [6] p114 参照).  $g=n$  のときは,  $V$  の Albanese 多様体  $Alb(V)$  の universality により, 群として  $Alb(V) \cong G^n(V)$  であるが, これは定義の意味の  $n$  次 Picard 多様体かどうかは一般に分らない.

命題 1.  $J_a^g$  から Abel 多様体  $A$  の解析的準同型写像に対し universal な解析的準同型写像

$$\psi^g: J_a^g(V) \rightarrow Pic^g(V)$$

が存在する.

証明略. なお詳しくは略すが  $Pic^g(V)$  にパラメータづけられた  $V$  の  $n-g$  サイクルの族  $\mathcal{F}$  (Poincaré family) は次の様な universality を持つ: 任意の代数多様体  $T$  にパラメータづけられた  $V$  の  $n-g$  サイクルの族は  $\ker \psi^g$  に属する族を無視すれば, Poincaré family を正則写像  $T \rightarrow Pic^g(V)$  が引き起こして得られる.

以上のように  $(Pic^g(V), \mathcal{F})$  は 2 通りの universality を持つ.  $Pic^g$  と  $J^g, T^g$  の間の関係は後の節で述べる.

## §2. Functorial な性質, Weil 写像の解析性

$J_g(V) = J^{n-g}(V)$ ,  $T_g(V) = T^{n-g}(V)$  とおく. 以下  $J^g$  について論ずるが,  $T^g$  についても同様である.

→

$V, W$  をそれぞれ  $n, m$  次元の非特異射影的代数多様体とする。正則写像  $f: V \rightarrow W$  が与えられれば、自然な準同型写像

$$f^*: H^{2s-1}(W, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2s-1}(V, \mathbb{R}) \quad \text{および}$$

$$f_*: H_{2q+1}(V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{2q+1}(W, \mathbb{R})$$

を得るが、これは  $\text{integral class} \rightarrow \text{integral class}$  に写し、 $\text{type}$  を保つから、準同型写像

$$f^*: J^s(W) \rightarrow J^s(V) \quad \text{および}$$

$$f_*: J_q(V) \rightarrow J_q(W)$$

を得る。  $H^{2s-1}(V, \mathbb{R})$  は  $H_{2q-1}(V, \mathbb{R})$  と  $\mathbb{Z}$  に dual であり、  
 から  $J^s$  と  $J^{n-s+1} = J_{q-1}$  は  $\mathbb{Z}$  に dual な Abel 多様体  
 で、  $f^*: J^s(W) \rightarrow J^s(V)$  は  $f_*: J_{q-1}(V) \rightarrow J_{q-1}(W)$  の  
 転置写像である。

命題 2. 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} J_q(V) & \xrightarrow{f_*} & J_q(W) \\ \varphi_q \uparrow & & \uparrow \varphi_q \\ J_q^a(V) & \xrightarrow{f_*} & J_q^a(W) \end{array}$$

これは後の定理 1 に含まれた (2) が  $f$  の場合のとき。

以後、ホモロジ一群とコホモロジ一群は Poincaré 双対性  
 $H \rightarrow H^{2n-\cdot}$  により同一視し、実(コ)ホモロジ一群を単に



$H(V)$  と書く。さらに Künneth の定理により  $H(V \times W)$  と  $H(V) \otimes H(W)$  とは同一視し,  $K_{p,q} : H(V \times W) \rightarrow H^p(V) \otimes H^q(W)$  を  $p, q$  成分への射影とする。

定義 6.  $\varphi \in H(V \times W) = H(V) \otimes H(W)$  に対応し, 準同型写像  $B(\varphi) : H(V) \rightarrow H(W)$  を  $B(\varphi)[\lambda] = (\pi_W)_*((\lambda \otimes 1) \wedge \varphi)$  ( $\lambda \in H(V)$ ) により定義する。

$J^q(V) = H^{2q-1}(V) / \text{im } H^{2q-1}(V, \mathbb{Z})$  であり,  $\text{Hom}(J_q(V), J^p(W))$  は  $\text{Hom}(H_{2q+1}(V), H^{2p-1}(W))$  の元を  $\int$  integral class と integral class に写し, かつ  $\mathbb{C}$  と可換な  $\mathbb{C}$  の作用部族とみなせる。一方  $\varphi \in H(V \times W)$  の Künneth type が  $(2q+1, 2p-1)$  であるとは

i)  $B(\varphi)$  が integral class を integral class に写す

$\Leftrightarrow \varphi$  が integral,

ii)  $B(\varphi)\mathbb{C} = \mathbb{C}B(\varphi) \Leftrightarrow \mathbb{C}\varphi = \varphi$

なる事がある。尤も  $\mathbb{C}\varphi = \varphi$  なる integral class  $\varphi \in H(V \times W)$  が与えられた時,  $\varphi$  の  $(2q+1, 2p-1)$  Künneth 成分に associate した  $J_q(V)$  から  $J^p(W)$  への解析的準同型写像を  $B^{j,p}(\varphi)$  と書く。

$\mathcal{C} : J_q(V) \rightarrow H_{2q}(V)$  を自然な準同型写像とすると,

定理 1 [7]  $Z \in \mathcal{Z}(V \times W)$  に対し, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} J_q(V) & \xrightarrow{B^{z,p}(\alpha Z)} & J^p(W) \\ \uparrow \varphi_q & & \uparrow \varphi^p \\ J_q^a(V) & \xrightarrow{Z(\cdot)} & J_a^p(W) \end{array} \quad (\text{可換性は } Z(\cdot) \text{ の定義域で考えよ}).$$

この定理の証明は略すか, 以下興味ある系を記す.

$C^{z,p}(V, W) = \{\varphi \in H(V \times W) \mid C\varphi = \varphi, \varphi \text{ は integral かつ K\"unneth type } (z, z+1, zp-1)\}$ ,  $C^p = C^{0,p}$ ,  $B^p = B^{0,p}$  とする.

命題 3.  $B^p: C^p(V, W) \cong \text{Hom}(Alb(V), J^p(W))$   
( $J_0(V) = J^m(V) = Alb(V)$ ).

$\Phi^p(V) \in C^p(J^p(V), V)$  の元で, 上の同型で  $Alb(J^p(V))$  ( $\cong J^p(V)$ )  $\rightarrow J^p(V)$  の恒等写像に対応するものを表わす.  
また, class  $\varphi \in H(V)$  に対し,  $X \in \mathcal{Z}(V)$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  ( $r \neq 0$ ) が存在して  $cl X = r\varphi$  とするとき,  $\varphi$  は代数的であるという.

補題 1.  $S$  は Abel 多様体,  $\varphi \in H(S \times V)$  は K\"unneth type  $(1, zp-1)$  の class とすると, 集合  $\{R \mid R \text{ は } S \text{ の部分 Abel 多様体で } \varphi|_{R \times V} \text{ が代数的}\}$  には最大元が一意的に存在する.

定義 2.  $J_a^z(V) \in \{R \mid R \text{ は } J^z(V) \text{ の部分 Abel 多様体で}$

$\mathbb{R}^q / \mathbb{R} \times V$  が代数的 } の極大元とし,  $\mathbb{R}^q_a = \mathbb{R}^q / J_a^0 \times V$  とする.  
 さらに,  $k^{(g)}$  は  $K_{1,2g-1}(\mathcal{L}\mathcal{F}) = k^{(g)} \mathbb{R}^q$  なる class  $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_T(J_a^0(V) \times V)$  が存在するような正整数の最小のものをとる.  
 また,  $\mathcal{F}$  のような class  $\mathcal{F}$  を quasi-Poincaré class といふ. 定理 1 より 次の定理 2 を得る:

- 定理 2 [7] 1) Weil 写像  $\varphi^g$  は解析的,  
 ii)  $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_T(J_a^0(V) \times V)$  が quasi-Poincaré class ならば  $t \in J_a^0(V) \setminus \{0\}$ ,  $\varphi^g(\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(0)) = k^{(g)} t$   
 iii)  $\text{Im } \varphi^g = J_a^0(V)$ .

証明 i)  $Z(t)$  ( $t \in T, Z \in \mathcal{Z}^g(T \times V)$ ) を  $\mathcal{Z}_a^g$  に属するサイクルの代数的族とし,  $Z(t_0)$  が定義された点  $t_0 \in T$  を一つと,  $Z$  を固定しておく. 写像  $\gamma: T \rightarrow \mathcal{Z}_0^g(T)$  を  $\gamma(t) = t - t_0$  で定義すると, 合成写像  $\varphi_0 \circ \gamma: T \rightarrow J_0(T) = \text{Alb}(T)$  は標準的写像. 写像  $\chi: T \rightarrow J^g(V)$  を  $\chi = B^g(\mathcal{L}Z) \circ \varphi_0 \circ \gamma + \varphi^g(Z(t_0))$  により定義すれば,  $\chi$  は明らかに正則. 一方定理 1 により 次の図式は可換. 従って  $Z(t)$  が定義された点  $t$  で  $\varphi^g(Z(t)) = \chi(t)$  故に  $\varphi^g$  は解析的.

$$\begin{array}{ccc}
 J_0(T) & \xrightarrow{B^g(\mathcal{L}Z)} & J^g(V) \\
 \varphi_0 \uparrow & & \uparrow \varphi^g \\
 \mathcal{Z}_0^g(T) & \xrightarrow{Z(\cdot)} & \mathcal{Z}_a^g(V)
 \end{array}$$

点  $t$  で  $\varphi^g(Z(t)) = \chi(t)$  故に  $\varphi^g$  は解析的.

ii), iii) 省略.

定理 2 i) は Weil [10] に open problem として書かれており, Griffiths [2] II でも証明されていそうである. ii) および iii) より,  $J_a^g(V)$  は quasi-Poincaré family をパラメータづけることになる. 即ち, 任意の  $T$  をパラメータづけた  $V$  の  $n-g$  サイクルの代数的族  $\{Z(t)\}$  が与えられた時, 族  $\{k^{(g)}Z(t)\}$  は,  $\ker \varphi^g$  に属する族を無視すれば, quasi-Poincaré family  $\mathcal{F}$  から正則写像  $T \rightarrow J_a^g(V)$  を引きもたして得られる.

$\mathcal{F}_\varphi^g$  を解析的準同型写像  $\varphi^g: \mathcal{F}_a^g(V) \rightarrow J_a^g(V) \subset J^g(V)$  の核とすると, 定義により  $\mathcal{F}_{reg}^g(V) \subset \mathcal{F}_\varphi^g(V)$ . 従って  $J_a^g(V)$  が  $g$ -次 Picard 多様体であること  $\Leftrightarrow$   $\mathcal{F}_{reg}^g(V) = \mathcal{F}_\varphi^g(V)$  の 2 つを示さねばならぬ: i)  $\mathcal{F}_{reg}^g(V) \supset \mathcal{F}_\varphi^g(V)$ , ii)  $k^{(g)} = 1$ . i) は例えは,  $\mathcal{U}: \Omega_{\mathbb{C}}^g \rightarrow H^{2g}$  が単射, 即ち代数的サイクル  $\Rightarrow$  torsion equivalence と homological equivalence が一致するからである.

最後に,  $g=1$  のときは  $\mathbb{P}^1(V) = K_{1,2}(\mathcal{U}P)$  ( $P$  は Poincaré divisor) より,  $\mathbb{P}^1$  が代数的であることに注意して,

命題 4.  $J_a^1(V) = J^1(V)$ ,  $J_a^g(V) = J_g(V)$ .

§3.  $T_{\text{Reg}}^g$ 

この節では, Weil 写像の像の特徴づけについて考える.  
 まず,  $X \in J_a^g(V) \subset J^g(V) = H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) / \text{im } H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$   
 上にある  $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  の部分空間とすると,  $(r, s) \neq (g, g-1)$   
 又は  $(g-1, g)$  ならば  $P_{r,s}(X) = 0$ . 従って同型 §1(2) におい  
 て,  $J_a^g(V)$  の原点における接空間は  $H^{g-1, g}(V)$  に含まれ,  
 $J_a^g$  は  $T^g$  の複素部分トラスであることが分る.

定義 8. 同型 §1(2) によつて, 原点における接空間が  
 $H^{g-1, g}(V)$  に含まれるような  $T^g(V)$  の複素部分トラスのうち  
 最大のものを  $T_{\text{Reg}}^g(V)$  と置く.

$V$  上の Hodge 構造を一定め,  $u \in H^2(V, \mathbb{D})$  を基本類  
 とする. 周知のように,  $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$  上には非退化歪計形  
 実双一次形式

$$A(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_r (-1)^{g+r} \int_V u^{2n-2(g+r)+1} \wedge \underline{a}_r \wedge \underline{b}_r$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ただし, } \underline{a}, \underline{b} \in H^{2g-1}(V, \mathbb{R}), \underline{a} = \sum_r u^r \underline{a}_r, \underline{b} = \sum_r u^r \underline{b}_r \\ \underline{a}_r, \underline{b}_r \text{ は原始的形式.} \end{array} \right)$$

が存在する.

定理 3 [8] i)  $W$  が  $T_{\text{Reg}}^g$  の複素部分トラスならば,  
 $A$  を  $W$  (の原点における接空間) に制限したものは非退化.  
 ii)  $W$  を  $T^g$  の実部分トラスで  $A|_W$  が非退化ならば,

$J(T^g) = W$  であるような自然の準同型写像  $f: T^g \rightarrow T^g$  が存在する。さらに、 $f$  が正則であるためには、 $W$  が複素部分トーラスであることが必要十分。

次に、 $H_1(T^g)$  と  $H^{2g-1}(V)$  とを同一視したとき、同型

$$H^1(T^g) \otimes H^{2g-1}(V) \cong \text{Hom}(H_2(T^g), H^{2g-1}(V))$$

により、右辺の恒等写像に対応する  $H^1(T^g) \otimes H^{2g-1}(V) = H^{2g}(T^g(V) \times V, \mathbb{R})$  の元を  $\Phi^g$  とする。これは §2 の  $\Phi^g$  とは微分同型  $T^g \cong J^g$  で対応する。

定義 9.  $W$  を  $T^g(V)$  の実部分トーラスで  $AW$  が非退化なものとし、 $f$  を定理 3 ii) の写像とすると、 $\Phi_W \in H^{2g}(T^g(V) \times V)$  を  $\Phi_W = (f \times 1)^* \Phi^g$  により定義する。

定理 4 [8]  $W$  を定義 9 と同じとすると、 $W$  が  $T_{\text{alg}}^g(V)$  の複素部分トーラスに存在するための必要十分条件は  $\Phi_W$  の型が  $(g, g)$  であること。

上の定理 4 により、 $T_{\text{alg}}^g$  は “ $\{W \subset T^g \mid \Phi_W \text{ の型が } (g, g) \text{ の最大元}\}$ ” と特徴づけられる。一方  $J_a^g$  は “ $\{W \subset T^g \mid \Phi_W \text{ が代数的}\}$ ” の最大元であるから、 $T_{\text{alg}}^g \supset J_a^g$  であり、さらに Hodge 予想を仮定すれば  $J_a^g = T_{\text{alg}}^g$ 。

§4. Moduli.

$J^{\delta}(V)$  は一般に  $V$  に holomorphic に依るが, 即ち複素解析族  $\{V_t\}$  に対し,  $\{J^{\delta}(V_t)\}$  は複素解析族をなす。

$T^{\delta}(V)$  は, 次の補題に依り,  $V$  に holomorphic に依る:

補題 2 [4]  $V \rightarrow \Delta$  を非特異代数多様体の複素解析族,  $\Delta$  は一次元円板とする。さらに  $t \in \Delta$  上のファイバーは  $V_t$  で表われ,  $\dim V_t = n$  とする。このとき,  $\omega^1, \dots, \omega^{2m}$  を  $H^{2n-2\delta+1}(V, \mathbb{C}) \cong H^{2n-2\delta+1}(V_t, \mathbb{C})$  の基底を代表する  $V$  上の  $\mathbb{C}^{2n-2\delta+1}$  形式' とすると,  $\Delta$  上の正則函数  $\xi_{\alpha j}(t)$  ( $1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq j \leq 2m$ ) で,  $2n-2\delta+1$  形式'  $\varphi_{\alpha} = \sum_{j=1}^{2m} \xi_{\alpha j} \omega^j$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) を各  $V_t$  に制限したものが  $\sum_{\substack{r+s=n-n, n-s \\ r+s=2\delta-1}} H^{r,s}(V_t) = \sum_{\substack{r+s \\ r+s=2n-2\delta+1}} H^{r,s}(V_t)$  の基底 (を代表する形式) となるようなものが存在する。

次の 2 つの定理は Lieberman [8] に依る:

定理 5  $B$  を単連結複素多様体,  $V_t (t \in B)$  を代数多様体の複素解析族,  $W$  を  $T^{\delta}(V_0)$  の実部分トーラスとすると,  $\mathcal{S} = \{t \in B \mid W \text{ は } T_{\text{reg}}^{\delta}(V_t) \text{ の複素部分トーラスと定義する}\}$  は  $B$  の開解析的集合で,  $W$  上の Abel 多様体の構造は  $t \in \mathcal{S}$  に holomorphic に依る。

定理 6  $B \ni$  任意の複素多様体,  $V_t (t \in B)$  を代数多様体の複素解析族とすとき,  $\dim T_{\text{reg}}^j(V_t)$  が  $t$  によらなければ,  $T_{\text{reg}}^j(V_t) (t \in B)$  は複素解析族となる.

例  $B = \{ Z \in M_3(\mathbb{C}) \mid tZ = Z, \text{Im} Z > 0 \}$  を 6次元 Siegel 上半平面,  $V_t (t \in B)$  を 3次元極大 Abel 多様体の族とす. §2 命題 4 により  $T_{\text{reg}}^1(V_t) = T^1(V_t)$ ,  $T_{\text{reg}}^3(V_t) = T^3(V_t) \cong V_t$ . 次  $T^2(V_t)$  を考えよと,  $\dim H^3(V_t, \mathbb{R}) = 20$ ,  $h^{2,1}(V_t) = 9$  より  $\dim T^2(V_t) = 10$ ,  $\dim T_{\text{reg}}^2(V_t) \leq 9$ . 実際,  $d(t) = \dim T_{\text{reg}}^2(V_t)$  とすとき, 可算個の  $B$  の 4次元解析的集合を除けば  $d(t) = 3$  であることが証明された. さらに各次元 4, 3, 2, 1, 0 の可算個の解析的集合があり, その上では  $d(t)$  の最小値が, とれどれ 5, 6, 7, 8, 9 であることが分る.