数理解析研究所講究録
69巻 1969年 53-66

ある準線形双曲型方程式の初期-境界値問題の解の大域的存在

京大 工　西田孝明

§1. 序

準線形双曲型方程式系の初期値(-境界値)問題を時間について大域的に考えると、一般には滑らかな解が存在しないことはよく知られている。そのため一般化された(不連続な)解を考えねばならない。このような大域解の存在について、単独方程式の場合には、Hopf [1] に初って [2][3][4] 等がある。方程式系の場合、初期値に各種の制限をおいた時の解の存在について、Riemann [5] を初めとして [6]～[14] 等がある。

ここでは、次の方程式の場合に一般な初期値、境界値について一般化された解の大域的存在を考えよう。

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a^2}{v}\right) = 0 \end{cases}
$$

この系は気体の比体積 v, 速度 u とした時の状態方程式が $p = a^2/v$, $a =$ 定数 で与えられる場合の質量, 運動量保存を Lagrange 形で書いたものである。

初期値は $-\infty < x < +\infty$ で

$$
(2)\qquad v(0,x) = v_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x)
$$

初期値-境界値は

$$
(3)\quad \begin{cases} v(0,x) = v_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x) & x \geq 0 \\ u(t,0) = u_1(t) & t \geq 0 \end{cases}
$$

で与える。ここで $v_0(x), u_0(x), u_1(t)$ は有界で局所的に有界変動な関数で $v_0(x) \geq \delta =$ 定数 > 0 とする。

問題(1)(2)は初期値問題, 問題(1)(3)はいわゆるピストン問題である。

解の存在の証明には Glimm の差分法[13]を用いる。

§2 初期値問題

初期値問題(1)(2)の一般化された解の定義

$v(t,x)$, $u(t,x)$ は有界可測関数であってこの積分等式を満たす

(4)
$$\iint_{t>0} (v\, f_t - u\, f_x)\, dt\, dx + \int_{t=0} v_0(x)\, f(0,x)\, dx = 0$$
$$\iint_{t>0} \left(u\, g_t + \left(\frac{a^2}{v}\right) g_x \right) dt\, dx + \int_{t=0} u_0(x)\, g(0,x)\, dx = 0$$

但 $f(t,x)$, $g(t,x)$ は有界な連続的微分可能な任意の関数

方程式系(1)は $v>0$ で双曲型であり固有値、それに対応する Riemann invariants、その非線形性は次である。

(5)
$$\lambda = -\frac{a}{v}, \quad r = u + a\log v$$
$$\mu = \frac{a}{v}, \quad s = u - a\log v$$

$$\partial\lambda/\partial r = \partial\mu/\partial s = (1/2a)\exp\{-(r-s)/2a\} > 0$$

Riemann 問題 即ち 系(1)の初期値

(6) $v_0(x) = \begin{cases} v_- \\ v_+ \end{cases}$ $\quad u_0(x) = \begin{cases} u_- & x<0 \\ u_+ & x>0 \end{cases}$

ここで $v_\mp, u_\mp$ は定数, $v_\mp > 0$,

の場合の初期値問題について.

補題 1

Riemann 問題 (1) (6) は 区分的に連続, 区分的に滑らかな解 $v(t,x), u(t,x)$ をもち 次の a priori 評価が成り立つ。

(7) $r(v(t,x), u(t,x)) \geq r_0$, $s(v(t,x), u(t,x)) \leq s_0$,

但 $r_0 = \min\{r(v_-, u_-), r(v_+, u_+)\}$, $s_0 = \max\{s(v_\mp, u_\mp)\}$

補題 2

(r, s) 平面において 衝撃波曲線は 同じ形をもつ。
即ち 点 (r_0, s_0) から出る第一種衝撃波 は

(8.1) $s - s_0 = f(r - r_0)$ $r \leq r_0$

と表わされ 第二種衝撃波は

(8.2) $r_0 - r = f(s_0 - s)$ $s \leq s_0$

と表わされる。 但 関数 $f(r)$ は r の奇関数であり 始点 (r_0, s_0) に依存せず $0 \leq f'(r) \leq 1$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ である。

ここで Glimm の差分法を考える。

初期値 (2) を階段関数で近似する

$$(9)\qquad v^{\ell}(0,x) = v_0(m\ell),\quad u^{\ell}(0,x) = u_0(m\ell)$$

$$(m-1)\ell < x < (m+1)\ell,\quad {}^{\forall}\ell > 0,\quad m : \text{偶数}$$

次を定義する。

$$r_0 = \inf_{-\infty<x<+\infty} r(v_0(x), u_0(x)),\quad s_0 = \sup_{-\infty<x<+\infty} s(v_0(x), u_0(x))$$

$$(10)\qquad \frac{h}{\ell} = \exp\{(r_0 - s_0)/2a\}/a$$

$$(11)\qquad \begin{cases} Y = \{(m,n) : m,n\ \text{整数},\ m-n\ \text{偶数},\ n \geq 0\} \\ A = \prod_{(m,n)\in Y} [((m-1)\ell, (m+1)\ell) \times \{nh\}] \end{cases}$$

ここで A の各因子は (t,x) 平面の x 軸に平行な線分である。以下点 $a = \{a_{mn}\} \in A$ を任意に選び格子点と云う。$a_{m0} = m\ell$ とおく。

近似解 $v^{\ell} = v^{\ell}(t,x)$, $u^{\ell} = u^{\ell}(t,x)$ が二格子点 $x,t = a_{m-1,n-1}, a_{m+1,n-1}$ で定義されたとする。

関数 v, u を初期値が $x < ml,\ x > ml$ で夫々

$$v(x,(n-1)h) = \begin{cases} v^l(a_{m-1,n-1}) \\ v^l(a_{m+1,n-1}) \end{cases},\quad u(x,(n-1)h) = \begin{cases} u^l(a_{m-1,n-1}) \\ u^l(a_{m+1,n-1}) \end{cases}$$

である Riemann 問題 (1) の解とする。

$$v^l(a_{mn}) = v(a_{mn}),\quad u^l(a_{mn}) = u(a_{mn})$$

とおき $(m-1)l \leq x \leq (m+1)l$, $(n-1)h \leq t < nh$ に対し

$$v^l = v(t,x),\quad u^l = u(t,x)$$

とおくと m を動かしてできる v^l, u^l は
$(n-1)h \leq t < nh$ での一般化された解を与える。
というのは $x = (m \mp 1)l$ の近くでは 補題 1 と
(10) とによって $v^l = v^l(a_{m\mp1,n-1}),\ u^l = u^l(a_{m\mp1,n-1})$
なる定数であるから。
こうして $\forall l > 0$ につき 近似解 v^l, u^l が
$-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq \forall T$ で 定まった。

近似解 v^l, u^l の適当な部分列が収束することを見るために、次の補題を用いる。その証明には 補題 1, 2 を用いる。

补题 3

(12) $$F(J_2) \leq F(J_1)$$

但 J_i $(i=1,2)$ は格子点 $a_{m-1,n}, a_{m,n-1}, a_{m+1,n}$
(あるいは $a_{m-1,n}, a_{m,n+1}, a_{m+1,n}$) を結ぶ線分であって

$$F(J_i) = \sum_{J_i} (\Delta r + \Delta s)$$

但 Δr (あるいは Δs) は第一種(あるいは第二種)の衝撃波に対する Riemann invariant r (あるいは s) の変動, $\sum_{J_i}$ は J_i 上でのすべての衝撃波についてその和。

補題1の評価, (10)の h, l の選び方による有限伝ぱ速度をもつことと補題3とによって次の評価をうる。

(13)
$$\left\{\begin{aligned}
&\underset{t=t_0,\ |x|\leq X}{\text{tot. var.}} \{v^l, u^l\} \leq C \cdot \underset{t=0,\ |x|\leq X+Ct_0}{\text{tot. var.}} \{v^l, u^l\} \\
&\exp(r_0 - s_0)/2a \leq v^l(t,x) \\
&\qquad \leq v_0(+X-Ct) + C \underset{t=0,\ +X-Ct\leq x\leq X+Ct}{\text{tot. var.}} \{v^l\} \leq C \\
&|u^l(t,x)| \leq |u_0(+X-Ct)| + C \cdot \underset{t=0,\ X-Ct\leq x\leq X+Ct}{\text{tot. var.}} \{u^l\} \leq C
\end{aligned}\right.$$

以上によって v^ℓ, u^ℓ の適当な部分列は $L^1_{loc}(t\geq 0, -\infty<x<+\infty)$ で収束し、その極限関数が求める解である。

定理 1

初期値問題 (1)(2) は $t \geq 0$ で一般化された解をもち、それは $t=$ 定数上、x につき局所的に有界、局所的に有界変動関数で、$t \to \{v, u\}$ は $L^1_{loc}(-\infty<x<+\infty)$ の関数として連続である。

§3 ピストン問題

初期-境界値問題 (1)(3) の一般化された解の定義

$v(t,x), u(t,x)$ は $t\geq 0, x\geq 0$ で有界可測であり、次の積分等式をみたす。

$$\iint_{t>0,x>0} (v f_t - u f_x)\,dt\,dx + \int_0^\infty v_0(x) f(0,x)\,dx +$$

$$(4) \qquad + \int_0^\infty u_1(t) f(t,0)\,dt = 0 \qquad \text{for } \forall f \in \mathring{C}^1,$$

$$\iint_{t>0,x>0} \left(u\, g_t + \frac{a^2}{v} g_x\right) dt\,dx + \int_0^\infty u_0(x) g(0,x)\,dx =$$

$$= 0 \qquad \text{for } \forall g \in \mathring{C}^1,\ g(t,0)=0$$

まず $t \geq 0,\ x \geq 0$ で次の初期値，境界値につ

$$
(15)\quad \begin{cases} v(0,x) = v_+ , \quad u(0,x) = u_+ & x > 0 \\ u(t,0) = u_- & t > 0 \end{cases}
$$

但 $v_+,\ u_\mp$ は定数で $v_+ > 0$

方程式(1)を解くと次をうる。

<u>補題4</u>

問題(1)(15)は $t \geq 0,\ x \geq 0$ で区分的に連続，区分的に滑らかな一般化された解をもち，それは次の a priori 評価をもつ。

$$
r(t,x) \equiv r(v(t,x), u(t,x)) \geq r(v_+, u_+) \equiv r_+ ,
$$

$$
s(t,x) \leq \max \{ s_+ \equiv s(v_+, u_+),\ 2u_- - r_+ \} ,
$$

$$
\Delta s \leq C\,|u_+ - u_-| \equiv C\,\Delta u
$$

但 Δs は解に現れる第二種衝撃波における Riemann invariant s の変動量，C はデータに依らない定数

次の量を定義する

$$
r_0 = \inf_{x \geq 0} r(v_0(x), u_0(x))
$$

$$
s_0 = \max \left\{ \sup_{x \geq 0} s(v_0(x), u_0(x)),\ 2 \sup_{0 \leq t \leq T} u_1(t) - r_0 \right\}
$$

Glimmの差分法を少し変形しよう。

$$\begin{cases} Y = \{(m,n) : m = 0, 2, 4, \cdots, n = 1, 2, 3, \cdots\}, \\ A = \prod_{(m,n)\in Y} [(m\ell, (m+2)\ell) \times \{nh\}] \end{cases}$$

ここで $h/\ell = \exp\{(r_0 - s_0)/2a\}/a$, $\forall \ell > 0$.
格子点 $a = \{a_{mn}\} \in A$ を任意に選ぶと補題1と補題4とから上の差分法は $0 \le t \le \forall T$, $0 \le x$ で近似解 v^ℓ, u^ℓ を与える。

線分 J_n の変りに次のような space-like な曲線を定義する。

i_m^{n-}（あるいは i_m^{n+}）, $m = 2, 4, \cdots$ とは格子点 $a_{m-2,n}$, $a_{m,n}$ を結ぶ滑らかな space like な曲線で $(n-1)h < t \le nh$（あるいは $nh \le t < (n+1)h$）にあり点 $(nh, m\ell)$ は通らないものとする。

$i_0^{n\pm}$ は点 $(nh \pm h/2, 0)$ と格子点 $a_{0,n}$ とを結ぶ線分とする。

補題5

$$(16)\quad \begin{cases} F(i_m^{n+}) \le F(i_m^{n-}) & m=2,4,\cdots \\ F(i_0^{n+}) \le F(i_0^{n-}) + C\cdot\Delta u_1 & m=0 \end{cases}$$

ここで $F(\cdot)$ は補題3のと同じとし

$\Delta u_1 = |u_1(nh+h/2) - u_1(nh-h/2)|$ 。

この補題によって近似解 v^ℓ, u^ℓ に対する望む評価が同じく得られる。即ち u^ℓ の全変動量の局所的な一様有界性そして局所的な一様有界性が得られ、次いで v^ℓ のそれらが得られる。これより v^ℓ, u^ℓ の適当な部分列は $L^1_{loc}(t\ge 0, x\ge 0)$ で収束し その極限関数が求める解である。

定理2

ピストン問題 (1),(3) は $t\ge 0$, $x\ge 0$ で一般化された解 v, u を持ち それは局所的に有界、$t=$定数上 x につき局所的に有界変動関数であり、$t\to\{v,u\}$ は $L^1_{loc}(0\le x)$ の意味で連続である。

文献

[1] E. Hopf : The partial differential equation

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}$$

Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950) 201-230

[2] P. Lax : Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.

Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 159-193

[3] O. Oleinik : Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Uspekhi Mat. Nauk 12 (1957) 3-73

[4] E. Conway & J. Smoller : Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first order equations in several space variables

Comm. Pure Appl. Math 19 (1966) 95-105

[5] B. Riemann : Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite

Abh. König. Gesellsh. Wiss. zu Göttingen (1860 (8)

[6] P. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws II

Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 537-566

[7] B. Rozhdestvenskii : Discontinuous solutions
hyperbolic systems of quasilinear equations.
Uspekhi Mat. Nauk (1959) 53–111

[8] Zhang Tong & Guo Yu-Fa : A class of initial value problems for systems of aerodynamic equations, Chinese Math., 7(1965) 90–101

[9] J. Smoller & J. Johnson : Global solutions of hyperbolic systems of conservation laws in two dependent variables,
Bull. of Amer. Math. Soc. 74(1968) 5, 915–918

[10] J. Johnson ; Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasilinear equations
Ph. D. thesis, University of Michigan, 1967

[11] M. Yamaguti & T. Nishida ; On some global solution for quasilinear hyperbolic equations
Funkcialaj Ekvacioj, 11 (1968) 51–57

[12] S. Godunov ; Estimates of discrepancies for approximate solutions of the simplest equation in gas dynamics,
J. of Num. Math. Math. Phys. 1 (1961) 622–637

[13] J. Glimm : Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 697-715

[14] J. Glimm & P. Lax : Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 105