数理解析研究所講究録
69巻 1969年 17-34

(O.A)-semigroups について

早大 教育 大春 慎之助

§1. X をBanach空間とし，以下の条件を満足するような X 上の有界線型作用素の one parameter family $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を考える：

(1) $T(0)=I,\ T(t)T(s)=T(t+s)$ $t, s\geq 0;$

(2) $\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x,$ $t_0>0,\ x\in X.$

このような族 $\{T(t)\}$ を semigroup と呼ぶ．そして

(3) $A_0x = \lim_{h\to 0+}\{T(h)x-x\}/h$

で定義されるような作用素を $\{T(t)\}$ の infinitesimal generator (i.g.) と呼ぶ．定義域 $D(A_0)$ は(3)の右辺の極限が存在するような元 x の集合である．また

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\|$$

は常に $<+\infty$ な値として存在し，これを $\{T(t)\}$ の type と呼ぶ．semigroup $\{T(t)\}$ が class(A) に属するとは，$X_0=\bigcup_{t>0}T(t)[X]$ が X で稠密であり，実数 $\omega_1>\omega_0$ が存在して，実部が ω_1 より大きな各 λ

に対して以下の条件を満足するような有界線形作用素 $R(\lambda)$ が存在することをいう：

$$\langle a\rangle \qquad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt, \qquad x \in X_0;$$

$$\langle b\rangle \qquad \sup\{\|R(\lambda)\| : \mathrm{Re}(\lambda) > \omega_1\} < +\infty;$$

$$\langle c\rangle \qquad s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda) = I.$$

このときさらに

$$\langle d\rangle_0 \qquad \int_0^1 \|T(t)x\|\,dt < +\infty, \qquad x \in X$$

が成立するならば，$\{T(t)\}$ は class $(0, A)$ に属するといい，また $\langle d\rangle_0$ の代わりに

$$\langle d\rangle_1 \qquad \int_0^1 \|T(t)\|\,dt < +\infty$$

が成立するとき $\{T(t)\}$ は class $(1, A)$ に属するという．semigroup $\{T(t)\}$ が以上の classes のいずれかに属するならば，その i.g. A_0 は densely defined, pre-closed である（$\{T(t)\}$ が class (C_0) に属するときには A_0 は closed）．その閉包 A は complete infinitesimal generator (c.i.g.) と呼ばれる．もし A が (A)-semigroup の c.i.g. であるならば $\rho(A) \supset \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) > \omega_1\}$ で各 $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega_1$ に対して $R(\lambda) = R(\lambda : A)$ となる．ここに $\rho(A)$ は A の resolvent set，$R(\lambda : A)$ は A の λ における resolvent operator を表わすものとする．A が $(0, A)$ もしくは $(1, A)$ class の semigroup の c.i.g. であるときには ω_1 は $> \omega_0$ なる任意の数でよい．以上についての詳しい議論は Hille-Phillips [1] にのべられている．

最近 H.Sunouchi [2] はR^dで定義された複素ベクトル値関数のつくるL^2-空間における初期値問題

(CP) $\quad (d/dt)u = P(D)u, \ t>0 \ ; \ u(0,\xi) = x(\xi)$

の semigroup characterization を取扱っている．ここに$P(D)$は定数行列係数をもつ，$\xi \in R^d$に関する偏微分作用素である．この結果では，(CP) が mildly correctly posed であるとき自然に class (0.A) 並びに class (A) の semigroups が導びかれる．一方 R.S. Phillips [4] は class (C_0) と class (0.A) の semigroups の性質に依って abstract Cauchy problem についての 2 つの formulations を与えて居り [2] の諸結果との間の関連を考えることができる．この報告では，主に (0.A)-semigroups についてその生成問題と半群列の収束性の問題について得られる結果をのべる．

§2. 本節では semigroups の生成問題についてのべる．

閉作用素 A に対して次の条件を導入する：

(i)′ $D(A)$は X で dense で，$\rho(A) \supset \{\lambda : Re(\lambda) > 0\}$;

(ii)′ $\|R(\lambda\,;A)\| = O(1/\lambda) \quad$ as $\lambda \to \infty$;

(iii)′ $\sup\{\|R(\lambda : A)\| : Re(\lambda) > 0\} < +\infty$;

(iv)′ 各$x \in D(A^2)$，$0<\delta'<\delta$ となるような任意の対δ'，δと任意の$\varepsilon > 0$ に対して $\lambda_0 \equiv \lambda_0(x\,;\varepsilon,\delta,\delta')$ が存在して

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\| \leqq \{\varphi(\delta') + \varepsilon\}\|x\|, \qquad \lambda > \lambda_0,\ n \geqq \lambda\delta,$$

ここにφは，ある negative type の非負値，非増加函数である．

(iv)' の形の条件は W. Feller [3] によって導びかれた．そして (A)-semigroups の Feller type の生成定理として次の Phillips の定理 [1; §12.5, Theorem 12.5.1] が良く知られている．

定理 P. 閉作用素 A が negative type の (A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であるための必要十分条件は，A に対して (i)'–(iv)' が満足されることである．またこのとき各 $t>0$ に対して $\|T(t)\| \leqq \varphi(t)$.

この節ではこの定理を，同じく Feller type でより一般の形にして，(A), (0,A), (1,A), (C_0) の各 class の生成定理を単一な方法で導びき出すことを考える：

今閉作用素 A に対して次の条件を導入する．

(i) 定義域 $D(A)$ は X で dense で，実数 ω が存在して

$$\rho(A) \supset \{\lambda : Re(\lambda) > \omega\}.$$

(ii) $\|R(\lambda : A)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to +\infty$.

(iii) 非負整数 k が存在して，任意の $x \in D(A^k)$ と任意の $T>0$ に対して集合 $\{\|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\| : 0 \leqq n/\lambda \leqq T;\ \lambda > \omega\}$ は X で有界．

(iv) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して正数 M_ε が存在して，各 $x \in D(A^k)$ に対して $\lambda_0 \equiv \lambda_0(\varepsilon, x)$ が対応して

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\| \leqq M_\varepsilon \|x\|, \qquad \varepsilon \leqq n/\lambda \leqq 1/\varepsilon,\ \lambda > \lambda_0.$$

上記の条件 (i)-(iv) をみたす閉作用素の族を $\mathfrak{G}_\omega^{(k)}$ で表わす．

すると次の結果を得る．

定理2.1. $\mathcal{G}_\omega^{(k)}$に属する閉作用素Aは，次の条件を満足するような有界線形作用素のつくる一意な$\underbrace{\text{semigroup}}_{\{T(t)\}}$を生成する:

(a) 各$x\in D(A^k)$と任意の$t>0$に対して，$j\to\infty$のとき$n_j/\lambda_j\to t$，$\lambda_j\to\infty$ならば，

$$T(t)x=\lim_{j\to\infty}\lambda_j^{n_j}R(\lambda_j;A)^{n_j}x\ ;$$

(b) 任意の$\varepsilon>0$に対して正数M_εが存在して，

$$\|T(t)\|\leqq M_\varepsilon,\qquad t\in[\varepsilon,1/\varepsilon];$$

(c) $$A^pT(t)x=T(t)A^px,\qquad x\in D(A^p),\ p\geqq 1;$$

(d) 各$x\in D(A^k)$に対して$\lim_{t\to 0+}T(t)x=x$．また各$x\in D(A^{k+1})$に対して，

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)Ax\,ds=\int_0^t AT(s)x\,ds,\qquad t>0.$$

従ってA_0を$\{T(t)\}$のi.g.とすると$D(A^{k+1})\subset D(A_0)$.

(e) $X_0=\bigcup_{t>0}T(t)[X]$としω_0を$\{T(t)\}$のtypeとする．するとある$\omega_1>\omega_0$が存在して，各$x\in X_0$と$Re(\lambda)>\omega_1$なるλに対して，

$$R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

がwell definedである．さらにX_0はXでdenseであり，

$$R(\lambda)x=R(\lambda:A)x,\qquad x\in X_0,\ Re(\lambda)>\omega_1.$$

この定理の証明の主な段階は以下にのべる補題を証明することにある: $r>\max\{0,\omega\}$を1つとり，$r_n=2^nr$とおく．更に，

ments を簡単にするために

$$T(n;t) \equiv r_n^{[r_nt]} R(r_n;A)^{[r_nt]} = (I - r_n^{-1}A)^{-[r_nt]}$$

。今 $t>0$ を1つ定め任意の $x \in D(A^{2K+2})$ をとる。そして $T(n+1;t)x - T(n;t)x$ を、

$$\left\{\left(I - \frac{1}{r_{n+1}}A\right)^{-[2r_nt]}x - \left(I - \frac{1}{r_{n+1}}A\right)^{-2[r_nt]}x\right\} + \left\{\left(I - \frac{1}{r_{n+1}}A\right)^{-2[r_nt]}x - \left(I - \frac{1}{r_n}A\right)^{-[r_nt]}x\right\}$$

変形して各項を評価すると、

$$\|T(n+1;t)x - T(n;t)x\| = O(1/r_{n+1})$$

あることを証明することができる。ここで order O は t の任意の compact subinterval 上で一様となる。そこで (ii) と (iv) を使って次の結果を得る。

補題 2.1. $A \in \mathcal{G}_\omega^{(k)}$ とする。すると各 $x \in D(A^k)$ と $t>0$ に対して $\lim_{n\to\infty} T(n;t)x$ が存在する。こゝでこの収束は $(0,\infty)$ の任意の compact subinterval 上で一様である。

そこで $T_0(t)x = \lim_{n\to\infty} T(n;t)x$ とおいて、(iv) によって各 $t>0$ に対し存在する $T_0(t)$ の continuous extension を $T(t)$ とするのである。

さて A を type ω_0 の (A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. とし、$\omega_1 (>\omega_0)$ を <a> を成立させる十分大きな実数として $T_1(t) \equiv e^{-\omega_1 t}T(t)$ とおく。すると equivalent semigroup $\{T_1(t)\}$ は negative type の (A)-semigroup と $A_1 = A - \omega_1$ はその c.i.g. である。そこで各 $t>0$ に対して $\varphi(t) \equiv \sup\{\|T_1(t+\sigma)\|;\sigma \geq 0\}$ とおく。すると φ は非負値をとる非増加

な negative type の函数となり，各 $t>0$ に対して $\|T_1(t)\| \leq \varphi(t)$ である．従って i.g. とその resolvents に関するよく知られた評価（[1; §12.5] もしくは [3]）によって A_1 に対して条件 (i)′–(iv)′ が成立していることがわかる．条件(iii)′は次の形で(iii)と関係している．

補題 2.2. (iii)′ $\sup\{\|R(\lambda;A)\| : Re(\lambda)>\omega_1\} < +\infty$ ならば (iii) が $K=2$ の場合に満足される．

証明には [1; Lemma 11.5.2, p345] を使う．そこで条件 (i), (ii), (iii)′, (iv)を満足する閉作用素の族を $\mathcal{G}(A)$ で表わす．すると定理 2.1 と上にのべた注意から次の形で定理 P を導き出すことができる．

定理 2.2. 閉作用素 A が (A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であるための必要十分条件は A が $\mathcal{G}(A)$ に属することである．

A を type ω_0 の (A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. とする．すると上にのべた注意からある $\omega_1>\omega_0$ に対して $A \in \mathcal{G}^{(2)}_{\omega_1}$ となる．

次に，条件 (i), (ii) と $K=2$ の場合の条件 (iii)，そして (iv) の代わりに次の条件を満足する閉作用素の族を $\mathcal{G}(0.A)$ で表わす：

(iv)$_0$ 各 $x \in X$ に対して $(0,\infty)$ 上で upper semicontinuous な函数 $f(t,x)$ で次の条件をみたすものが存在する．

(α) $(0,T)$ の形の任意の有界区間で summable;

(β) 任意の $\varepsilon>0$, $0<\beta<\gamma$ となる任意の対 β, γ に対して $\lambda_0 \equiv \lambda_0(x;\beta,\gamma,\varepsilon)$ が対応して，

と

$$\| \lambda^n R(\lambda : A)^n x \| \leqq f(n/\lambda ; x) + \varepsilon \qquad \beta \leqq n/\lambda \leqq \gamma,\ \lambda > \lambda_0 .$$

(i), (ii) と $k=2$ の場合の (iii) の下に, $(iv)_0$ から次のような条件が導びき出される:

(iv)′ 任意の $\varepsilon>0$ に対して正数 M_ε が存在して

$$\| \lambda^n R(\lambda : A)^n \| \leqq M_\varepsilon , \qquad \varepsilon \leqq n/\lambda \leqq 1/\varepsilon,\ \lambda > \omega_1 > 0.$$

従って $A \in \mathcal{G}(0, A)$ ならば定理 2.1 によって (a) − (e) を満たす semigroup $\{T(t)\}$ が存在し, 補題 2.1 と合わせて次の収束を得る: 任意の $t>0$ に対して $j \to \infty$ のとき $\lambda_j \to \infty$, $n_j/\lambda_j \to t$ ならば

$$(*) \qquad T(t) = s\text{-}\lim_{j\to\infty} \lambda_j^{n_j} R(\lambda_j ; A)^{n_j}, \qquad t>0.$$

そこで f の upper semicontinuity と上の収束から, 各 $x \in X$ に対して $\|T(t)x\| \leqq f(t, x)$ となるから $\{T(t)\}$ は class $(0, A)$ に属する.

かくして次の形の $(0, A)$-semigroups の生成定理を得る.

定理 2.3. 閉作用素 A が $(0, A)$-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であるための必要十分条件は $A \in \mathcal{G}(0, A)$ となることである. またこのとき各 $x \in X$ と $t>0$ に対して $\|T(t)x\| \leqq f(t, x)$ となる.

上の定理で $\mathcal{G}(0, A)$ の条件 $(iii)_{k=2}$ を (iii)′ とおきかえてもよい.

A を type ω_0 の $(0, A)$-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であるとする. すると任意の $x \in D(A)$ に対して $T(t)x$ は $t \geqq 0$ で連続である.

従って，

$$R(\lambda:A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t)x\,dt, \quad Re(\lambda)>\omega_0,\ x\in D(A)$$

を評価することによって，A に対して条件(iii)が $k=1$ の場合に成立することがわかる．従って $A\in \mathcal{G}^{(1)}_{\omega_0}$ である．

次に(iV)$_0$ の代りに次の形の条件を導入する．

(iV)$_1$ $(0,\infty)$ 上で upper semicontinuous な函数 $f(t)$ で次の条件をみたすものが存在する：

(α)$_1$ $(0,T)$ の形の任意の有界区間で summable.

(β)$_1$ 任意の $x\in X$, $\varepsilon>0$ と $0<\beta<\gamma$ となる任意の対 β,γ に対して $\lambda_0\equiv\lambda_0(x;\beta,\gamma,\varepsilon)$ が存在して，

$$\|\lambda^n R(\lambda:A)^n x\| \leqq f(n/\lambda)\|x\|+\varepsilon, \quad \beta\leqq n/\lambda\leqq\gamma,\ \lambda>\lambda_0.$$

そこで(i), (ii), (iii)$_{k=2}$, (iV)$_1$ を満足する閉作用素の族を $\mathcal{G}(1,A)$ で表わす．今 $A\in\mathcal{G}(1,A)$ であるとすると，前の議論から A は $(0,A)$-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であり，結果(*)と f の upper semicontinuity から任意の $t>0$ に対して $\|T(t)\|\leqq f(t)$ となる．従って(1.A)-semigroups について次の生成定理が得られる．

定理 2.4. 閉作用素 A が(1.A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であるための必要十分条件は $A\in\mathcal{G}(0,A)$ となることである．またこのとき各 $t>0$ に対して $\|T(t)\|\leqq f(t)$ である．

従ってまた A が type ω_0 の(1,A)-semigroup の c.i.g. であるなら

は $A \in \mathfrak{G}_{\omega_0}^{(1)}$ である．最後に，(C_0)-semigroup の生成定理は次のようにのべられる．

定理 2.5. A が (C_0)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.g. であるための必要十分条件は，ある数 ω にたいして $A \in \mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}$ となることである．

§3. 本節では半群の収束性についてのべる．最近 I. Miyadera[5] は (1.A)-semigroups の作る列の収束性を取扱い，半群の perturbation theory を論じている：

$\{T_n(t): t \geqq 0\}_{n=1,2,3,\cdots}$ を (1.A)-semigroups の列として，A_n で各 $\{T_n(t)\}$ の c.i.g. を表わす。今この列にたいして次のような条件を仮定する．

$(S)_1$ 実数 γ が存在して，

$$\sup_n \int_0^\infty e^{-\gamma t} \| T_n(t) \| \, dt < +\infty.$$

(C) 実部が γ より大きい数 λ_0 が存在して，

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0; A_n) = R(\lambda_0)$$

が有界線型作用素として存在する．

このとき I. Miyadera は次の結果を得ている．

定理 M. 条件 $(S)_1$ と (C) の下に次の 2 つの条件を置く：

(M1) 正数 K が存在して，

$$\| \lambda R(\lambda; A_n) \| \leqq K, \qquad \lambda > \gamma,\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

(M 2)　$R(\lambda_0)[X]$ は X で dense.

すると次のことが成立する.

(a)　閉作用素 A が存在して, 或る (1. A) - semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. となり, $R(\lambda_0; A) = R(\lambda_0)$.

(b)
$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t), \qquad t>0,$$

こゝで収束は $(0.\infty)$ の任意の compact subinterval で一様である.

この節ではこの定理を (0, A)-semigroups の場合に拡張することを考える:

$\{T_n(t); t\geq 0\}_{n=1,2,3,\cdots}$ を (0.A)-semigroups の列として, $(S)_1$ の代わりに次のような条件を考える:

(S)　実数 γ が存在して
$$\sup_n \int_0^\infty e^{-\gamma t}\|T_n(t)x\|\,dt < +\infty, \qquad x\in X.$$

前と同様にして A_n で各 $\{T_n(t)\}$ の c.i.g. を表わすものとする. すると各 n に対して $\rho(A_n)\supset\{\lambda; Re(\lambda)>\gamma\}$ であることを証明することができる. この節の主定理として次の結果を得る.

定理 3.1. 条件 (S) の下に, 閉作用素 A が存在して,
$$\int_0^\infty e^{-\gamma t}\|T(t)x\|\,dt < +\infty, \qquad x\in X,$$

となる或る (0.A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. となり, 収束 (b) が成立するための十分条件は, (C), (M1), (M2) と次の条件が満足

されることである:

(B) 任意の $\varepsilon>0$ と各 $x\in X$ に対して

$$\sup_n \int_{\xi'}^{\xi} \|T_n(t)x\|\,dt = O(|\xi-\xi'|),$$

ここで order O は $\xi, \xi'\in[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ に関して一様である.

また, このとき $R(\lambda_0; A)=R(\lambda_0)$ となる.

例えば(B)は下のいずれの条件からも直ちに導びかれる.

$(B)_1$ 任意の $\varepsilon>0$ と任意の $x\in X$ に対して

$$\operatorname{ess.sup}_{\varepsilon\leqq t\leqq 1/\varepsilon} \sup_n e^{-\gamma t}\|T_n(t)x\| < +\infty.$$

$(B)_2$ 各 $x\in X$ に対して $T_n(t)x$ は $(0,\infty)$ で locally uniformly bounded.

ここで X-値函数 $f(t)$ が $(0,\infty)$ で locally bounded であるとは, 各 $t\in(0,\infty)$ に対して正数 $\delta>0$ がとれて, $[t-\delta, t+\delta]\subset(0,\infty)$, $\sup\{\|f(s)\|;\ t-\delta\leqq s\leqq t+\delta\}<+\infty$ となることをいう.

定理 M のように $(S)_1$ を仮定したときには条件(B)は不要になる. 何故ならばこのときには次のよく知られた lemma で $\varphi(t)=\|T_n(t)\|$ とおくことによって, $(B)_2$ が満足されてしまうからである:

補題 (Hille-Phillips). $\varphi(t)\ (>0)$ は $(0,\infty)$ で可測な函数とし, $\varphi(t+s)\leqq\varphi(t)\varphi(s)$ で $\int_0^\infty e^{-\gamma t}\varphi(t)\,dt\leqq M$ を満足しているものとする. すると各 $t>0$ に対して

$$\varphi(t)\leqq M^2 e^{\gamma t}/t^2.$$

従って定理3.1から定理Mを次のようにして導くことができる：今(S)$_1$, (C), (M1), (M2)が満たされているものとすると，定理3.1からclass $(0, A)$ の limit semigroup $\{T(t)\}$ を見出すことが出来る．$\|T(t)\|$ は $t>0$ に関して可測であるから，

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t}\|T(t)\|\,dt < +\infty$$

であることを示せば十分である．ところが仮定(b)から $\|T(t)\| \leqq \liminf_{n\to\infty}\|T_n(t)\|$ となるから Fatou の補題によって $e^{-\gamma t}\|T(t)\|$ が $(0, \infty)$ 上で summable であることを示すことができる．

次に定理3.1のいくつかの variations を考える．まず lemmas をいくつか用意する．

補題3.1．(S)と(C)と次の条件を仮定する：

(K) $$\text{s-}\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R(\lambda : A_n) = I, \quad \text{uniformly in } n.$$

すると以下のことが成立する：

(a) 正数Lが存在して，$\|R(\lambda : A_n)\| \leqq L$, $\quad Re(\lambda) > \gamma$; $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) (M1)がみたされる．

(c) 実部が γ より大きい任意の λ に対して

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} R(\lambda : A_n) = R(\lambda)$$

が有界線形作用素として存在する．

(d) 閉作用素 A が存在して，$Re(\lambda) > \gamma$ に対して $R(\lambda) = R(\lambda : A)$ と

なる．さらに，$s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I$．(従って $D(A)$ は X で稠密)．

(a), (b) の証明には，各 $Re(\lambda)>\gamma$ と各 $x\in X$ に対して

$$R(\lambda;A_n)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_n(t)x\,dt$$

であることに注意して条件(S)と共鳴定理を使う．(c), (d) の証明には T. Kato [6; Theorem IX 2.17, p503] の結果を使う．

補題 3.2. (S) と (C) の下では (M1)+(M2) と (K) とはたがいに同等である．

(M1)+(M2) ⇒ (K) については，まず $R(\lambda_0)[X]$ の任意の元 x について $\lim_{\lambda\to\infty}\sup_n\|\lambda R(\lambda;A_n)x-x\|=0$ をいうことが出来るから (M2) を使って (K) を得る．この補題により我々は定理 3.1 を次の形に書き直すことができる：

定理 3.2. 条件(S)の下に，定理 3.1 の (a), (b) が成立するための十分条件は，(C), (K), (B) が満たされていることである．

この結果は上に引用した T. Kato の定理 [6; Th. IX 2.17] の (0, A)-Semigroups の場合への直接の拡張になっている．

次に，inversion formula に関する Phillips の定理 [1; Th. 6.3.3., p221] の証明を見直すことによって次の補題を得る．

補題 3.3. $\eta>0$ に対して $f_p(\eta;x)\equiv e^{-\gamma\eta}\|T_p(\eta)x\|$ とおく．すると条件 (S) と (B) の下に次のことが成立する：

(a) $$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty K(\xi,\eta;\lambda)f_p(\eta;x)\,d\eta=f_p(\xi;x),\qquad \xi>0,$$

ここで, $K(\xi;\eta:\lambda)=e^{-\lambda(\xi+\eta)}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^2\xi)^{n+1}\eta^n/n!(n+1)!$.

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\sup_{\lambda>0}\sup_{\varepsilon\leqq\xi\leqq 1/\varepsilon}\int_0^\infty K(\xi,\eta:\lambda)f_p(\eta)d\eta<+\infty.$$

補題3.3を使って更に1つの補題を得る. この補題から容易に分るように条件(S)の下では(B)と$(B)_2$は互いに同値となる.

補題3.4. (S)と(B)を仮定する. すると函数

$$\psi(t)\equiv\sup_{\sigma\geqq 0}\sup_n\|e^{-\gamma'(t+\sigma)}T_n(t+\sigma)\|$$

が各$t>0$に対して有限となるような実数γ'が存在する. くわしくいえば, このとき$\psi(t)$は非負値をとり, 非増加で各$t>0$に対して$e^{-\gamma' t}\|T_n(t)\|\leqq\psi(t)$となるような negative type の函数である.

そこで(B)の代りに次の条件を考える.

$(B)_3$ 非負値, 非増加で任意のnと各$t>0$に対して$\|T_n(t)\|\leqq\psi(t)$ $(<+\infty)$となるような negative type の函数$\psi(t)$が存在する.

今$\{T_n(t):t\geqq 0\}_{n=1,2,3,\dots}$を初めにのべた, (S)と(B)を満足するような(0,A)-semigroups の列とすると, 補題3.4によって十分大きなγ_0をとれば equivalent (0,A)-semigroups の列$\{e^{-\gamma_0 t}T_n(t):t\geqq 0\}_n$で以下にのべる条件と$(B)_3$を満足するものを考えることができる:

(S)′ $$\sup_n\int_0^\infty\|T_n(t)x\|dt<+\infty,\qquad x\in X.$$

従ってまた定理3.1を次のような形にのべかえることができる.

定理3.3. (S)′の下に,閉作用素Aが存在して,negative type の或る(0,A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. となり,これに対して結果(b)が成立するための　十分条件は,(C),(K),$(B)_3$ が成立することである.

かくして定理3.1を証明することは定理3.3を証明することに帰着される.(S)′,(C),(K)を仮定すると補題3.1から densely defined な閉作用素Aが存在して各 $Re(\lambda)>0$ に対して

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\lambda;A_n)=R(\lambda;A)$$

となる.そして各 $\{T_n(t)\}$ が(0,A)-semigroup であることと $(B)_3$ から A は或る(A)-semigroup $\{T(t)\}$ の c.i.g. であり,これに対して結果(b)が成立することが導びかれる.そこで各 $\|T(t)x\|$ の可積分性をいうためには,定理Mを導びき出したように,Fatou の補題を用いればよい.

参考文献

[1] E. Hille and R.S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, A.M.S. Colloq., Vol 31, (1957).

[2] H. Sunouchi, Semi-group characterization of Cauchy problems, to appear.

[3] W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, Ann. of Math., 58(1), (1953), 166-174.

[4] R. S. Phillips, A note on the abstract Cauchy problem, Proc. N.A.S. 40, (1954), 244-248.

[5] I. Miyadera, Perturbation theory for semi-groups of operators, 数学 20(1), (1968), 14-25.

[6] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, (1966).

[7] S. Oharu, On the convergence of semigroups of operators, Proc. Japan Acad., 42(8), (1966), 880-884.

[8] ———, Remarks on the generation of semigroups of bounded linear operators, to appear.

[9] H. Sunouchi and S. Oharu, On the convergence of (o, A)-semigroups, to appear.