数理解析研究所講究録
70巻 1969年 97-110

非線形偏微分方程式に関する随伴式の構想

慶應義塾大学工学部
鬼頭史城

(1). 前おき。

(イ). 私の手元に文献を調べる便宜がないので，下記の事項は目新らしくないかも知れない。思いついたままを記した。

(ロ). ここで用いる関数 F, Φ, ---- は関与してくるところの各変数 (argument) についての連続関数であり，すくなくとも使われる範囲内での偏導関数をもち，それらが有限連続であるものとする。結果のあるものは，その範囲外[例えば偏導関数が区间的に連続 (piece-wise continuous) である場合にも適用し得るであろう。

(ハ). 文献 (B.3) の Chap.3 には，だいぶ之に近いことが書いてあるようである。

(ニ). ここでは自変数が x, y の2個だけとした。(2次元問題). 自変数が x, y, z, ---- などのケースに対しても同じ趣旨のことが言えるであろう。

(2). 簡単な例

線形偏微分方程式の Riemann の解法以来

$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, ----)$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \qquad \text{-----} (1)$$

の形の合同式が主役をつとめてきた。この考え方を世に紹介したのは G.Darboux だとのことである。[文献(A.1)] それ以来，線形偏微分方程式に関する限り，ずい分理論が発展した。[文献(A.2, 3, 4)]

この種の考え方を非線形問題に適用できないものか，と考えてみた。しかしすでに既知のことかも知れない。自変数が1個(x)，従属変数が1個(w)の場合に対して，Darboux [文献 A.1] は下記のことをすでに記している。すなわち，合同式

$$F[x, w, w', \cdots w^{(n)}] \equiv \frac{d}{dx}\left[\Phi(x, w, w', \cdots, w^{(n-1)})\right] \qquad \text{----} (2)$$

が成り立つための必要条件は下記の(4)式である。それを見るために(2)式より

$$I = \int_a^{\xi} F[x, w, w', \cdots, w^{(n)}]\, dx$$
$$= \left|\Phi(x, w, w', \cdots, w^{(n-1)})\right|_a^{\xi}$$

wの代わりに $w + \Delta w$ をおいてもよいから

$$\Delta I = \left|\text{'' ''}\right|_a^{\xi} + \int_a^{\xi} F_1\, \Delta w \cdot dx$$

此処で

$$F_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) - \cdots \qquad \text{--} (3)$$

(2)によって，ΔIが $x=a$ と $x=\xi$ とにおける $\Delta w^{(\nu)}$の値しか関係してこないから，求める必要條件は

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right)-\cdots+(-)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\right)$$
$$\equiv 0 \qquad \text{--- ---} \quad (4)$$

となることである。

$\boxed{\text{例 1}}$ $F\equiv a(x)\,w+b(x)w'+c(x)w''$ に対しては

(4)式は

$$a(x)-\frac{d}{dx}[b(x)]+\frac{d^2}{dx^2}[c(x)]\equiv 0$$

$\boxed{\text{例 2}}$ $F\equiv w^{(3)}w^{(4)}$ に対しては

$$-\frac{d^3}{dx^3}\left[\frac{\partial F}{\partial w^{(3)}}\right]+\frac{d^4}{dx^4}\left[\frac{\partial F}{\partial w^{(4)}}\right]\equiv 0$$

すなわち

$$-w^{(7)}+w^{(7)}\equiv 0$$

3. 自変数が x, y，従属変数が w, u の場合.

関数

$$F(x,y,w,w_x,w_y,w_{xx},w_{xy},w_{yy},u,u_x,u_y,\cdots,u_{yy}) \qquad \text{----}(5)$$

に対して

$$F\equiv\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} \qquad \text{--- --}(6)$$

となるための必要條件．　　下記の関係式

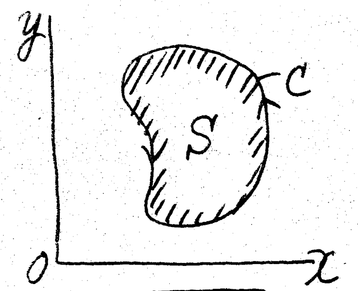

Fig.1

$$\iint_S F\,dx\,dy = \int_C \left[M\,dy - N\,dx \right] \quad \text{---(7)}$$

において，$w(x,y)$, $u(x,y)$ の代わりに

$$w+\Delta w,\quad u+\Delta u$$

とおき

$$\Delta F = G_1 \Delta w + G_2 \Delta u + \frac{\partial}{\partial x}[\Delta J] + \frac{\partial}{\partial y}[\Delta H]$$

の形になるように，G_1, G_2 を求めることによって，必要條件は

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right) \equiv 0, \quad \text{---(8)}$$

$$G_2 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial F}{\delta u_y}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\right) \equiv 0 \quad \text{---(9)}$$

ここで一般に $\frac{\delta}{\delta x}(P)$ は P に含まれている x, w, u, ---, w_x, ---, に対して x についての偏微分を表わす。同様に $\frac{\delta}{\delta y}(P)$ は，P における y, w, w_x, ---, u, u_x, ---- に対して y についての偏微分を表わす。$\partial F/\partial w_x$ は F の中の w_x だけに着目しての偏微分を表わす。

4. $\Gamma = u\Phi(w) - w\Psi(u)$ の場合

ここで，$\Phi(w)$，$\Psi(u)$ はそれぞれ

$\Phi[x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \cdots]$

$\Psi[x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots]$

を表わすものとする。又簡単のために

$$\left.\begin{aligned} E_w[\Phi(w)] &= \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_x}\right) + \cdots \\ E_u[\Psi(u)] &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_x}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \text{---(10)}$$

と書き表わす。[(8), (9) 式参照]　　そうすると

$$E_w[u\Phi(w) - w\Psi(u)] = E_w[u\Phi(w)] - \Psi(u)$$

$$E_u[u\Phi(w) - w\Psi(u)] = \Phi(w) - E_u[w\Psi(u)]$$

それ故下の條件式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} E_w[u\Phi(w)] - \Psi(u) &\equiv 0 \\ E_u[w\Psi(u)] - \Phi(w) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{---(11)}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に

$$E_w[u\Phi(w)] \neq uE_w[\Phi(w)]$$

である。

$\boxed{\text{例}}$

$$\Phi(w) = w_{xx} + w_{yy}$$

$$\Psi(u) = u_{xx} + u_{yy}$$

とすると

$$E_w[u\Phi(w)] = \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[u\frac{\partial\Phi}{\partial w_{xx}}\right] + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[u\frac{\partial\Phi}{\partial w_{yy}}\right]$$

$$= u_{xx} + u_{yy}$$

$$E_u[w\Psi(u)] = \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[w\frac{\partial\Psi}{\partial u_{xx}}\right] + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[w\frac{\partial\Psi}{\partial u_{yy}}\right]$$

$$= w_{xx} + w_{yy}$$

故に(11)式は

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv u_{xx} + u_{yy}$$

$$w_{xx} + w_{yy} \equiv w_{xx} + w_{yy}$$

となり 條件はみたされている。

5. 逆のケース

逆に

$$\left.\begin{aligned} M &\equiv u\Phi_1(w) - w\Psi_1(u) \\ N &= u\Phi_2(w) - w\Psi_2(u) \end{aligned}\right\} \text{---}(12)$$

とおくと

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = u\left[\frac{\delta\Phi_1(w)}{\delta x} + \frac{\delta\Phi_2(w)}{\delta y}\right]$$

$$-w\left[\frac{\delta\Psi_1(u)}{\delta x} + \frac{\partial\Psi_2(u)}{\delta y}\right]$$

$$+\left[u_x\Phi_1(w) + u_y\Phi_2(w)\right] - \left[w_x\Psi_1(u) + w_y\Psi_2(u)\right]$$

$$\text{-----}(13)$$

それ故，(13)の右辺の形を右辺にとれば それは

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

の形に直すことができる。例えば

$$\Phi_1(w) = w_{xx} + w_{yy} \qquad \Phi_2(w) = -w_{xy}$$

$$\Psi_1(u) = u_{xx} + u_{yy} \qquad \Psi_2(u) = -u_{xy}$$

とおくとき

$$\frac{\delta \Phi_1(w)}{\delta x} = w_{xxx} + w_{xyy} \ , \quad etc., etc.$$

であるから (13) 式は

$$-u\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y_2}\right]$$

$$-w\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right]$$

$$-u_x[w_{xx} + w_{yy}] - u_y[-w_{xy}]$$

$$-w_x[u_{xx} + u_{yy}] - w_y[-u_{xy}]$$

となる。故に

$$u\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - w\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + [u_x \Delta w - w_x \Delta u]$$

$$- [u_y w_{xy} - w_y u_{xy}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[u\{\Delta w\} - w\{\Delta u\}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[-u\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + w\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right]$$

である。ここで Δ は $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ の略記である。

6. [illegible]問題 (概要)

6節, 7節は, 紙数の関係上, 趣旨だけを記してある。

ここに

$$F(w, u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \qquad \text{---} (14)$$

に適合する数式 (expression) F, M, N が与えられているとする。F, M, N は $w, w_x, w_{xx}, \text{---}, u, u_x, u_{xx}, \text{---}$ 等に対する (非線形の) expression であるとする。

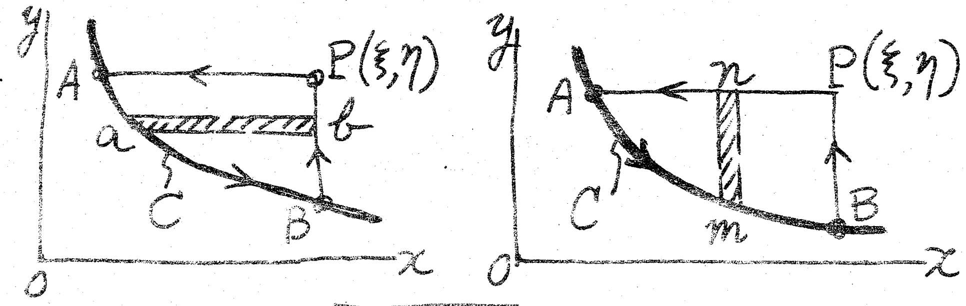

Fig. 2

Fig. 2 において曲線Cの上での境界値が与えられているものとする。任意の点 P(ξ, η) を通り AP (x軸に平行) と BP (y軸に平行) とを引く。

式 (14) の両辺を面積 S [AP BCA] 内に積分すれば

$$\iint_S F(w, u)\, dx\, dy$$

$$=\iint_S \frac{\partial M}{\partial x}\,dxdy+\iint_S \frac{\partial N}{\partial y}\,dxdy$$

$$=\int |M|_a^b\,dy+\int |N|_m^n\,dx$$

$$=\int_B^P M_{(x=\xi)}\,dy+\int_A^P N_{(y=\eta)}\,dx+\int_{ACB}[Mdy+Ndx] \qquad \text{------(15)}$$

それ故 面積 S [APBCA] 内で

$$F(w,u)=0 \qquad \text{---(A)}$$

ならば

$$\int_B^P M_{(x=\xi)}\,dy+\int_A^P N_{(y=\eta)}\,dx$$

$$=-\int_{ACB}[Mdy+Ndx] \qquad \text{---(16)}$$

境界線 ACB の上で u, w に対する十分な値が与えられているとき，(16)式の右辺は既知関数（ξ，η についての）である。 $F\equiv u\Phi(w)-w\Psi(u)$ の場合には，例えば面積 S 内で

$$\Phi(w)=0,\quad \Psi(u)=0$$

又は

$$\Phi(w)=Aw,\quad \Psi(u)=Au$$

[A は x, y の既知関数] となるような場合に (16)が

あてはまる。

(12),(13)式の場合には，PA，PBの上で $u=0$ となるような関数 u をえらんであれば公式(16)において

$$M_{(x=\xi)} = -w\Psi_1(u),\quad N_{(y=\eta)} = -w\Psi_2(u)$$

となるから(16)は w に関する一種の線形積分方程式になる。そして w は方程式 $F=0$ [ただし F は(13)の形]の解である。[もちろん，もっと検討すべきである。]

V. 境界値問題(仮称)

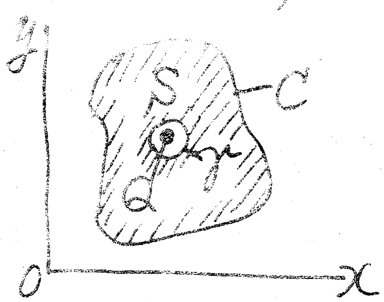

Fig. 3

閉じた曲線 C で囲まれた領域 S について

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(w)=0\\ \Psi(u)=0\end{array}\right\} \quad \text{---}(17)$$

となるものとする。上記の第4節の場合を考え

$$F \equiv u\Phi(w) - w\Psi(u)$$

に対して，S のうち点 Q を中心とし小半径 ε で画いた円の内部を除いた領域 S' に対して

$$\iint_{S'} F\,dxdy = \int_C [Mdx - Ndy] + \int_\gamma [Mdx - Ndy]$$

である。(17) によって

$$\int_C [Mdx - Ndy] + \int_\gamma [Mdx - Ndy] = 0 \qquad \text{---(18)}$$

第5節の場合に対しては

$$F(w;u) = \frac{\partial}{\partial x}[u\,\Phi_1(w) - w\,\Psi_1(u)] + \frac{\partial}{\partial y}[u\,\Phi_2(w) - w\,\Psi_2(u)]$$

そして

$$\iint_S F(w;u)\,dxdy$$
$$= \int_{C+\gamma} \left[\{u\,\Phi_1(w) - w\,\Psi_1(u)\}dy - \{u\,\Phi_2(w) - w\,\Psi_2(u)\}dx\right]$$
$$= \int_{C+\gamma} u[\Phi_1(w)dy - \Phi_2(w)dx] - \int_{C+\gamma} w[\Psi_1(u)dy - \Psi_2(u)dx] \qquad \text{----(19)}$$

境界線Cの上で $u=0$ となるような関数 u をえ

うべば

$$\iint_S F(w;u)\,dx\,dy$$
$$=\int_\gamma u[\Phi_1(w)dy-\Phi_2(w)dx]$$
$$-\int_\gamma w[\Psi_1(u)dy-\Psi_2(u)dx]$$
$$-\int_{C+\gamma} w[\Psi_1(u)dy-\Psi_2(u)dx] \qquad ----(20)$$

ポテンシアル論などで言われていることにならい，関数 u は点 $Q(\xi,\eta)$ で或る特異性［例えば r^α, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$］をもたせるものとする。

附記

関数 F, Φ, Ψ が w, w_x, w_{xx}, ---, u, u_x, u_{xx}, ---- に関しての多項式である場合が，実用上注目されると思われる。

文献

A 線形偏微分方程式に関しては：－

(1) G. Darboux, Leçons sur la Theorie generale des Surfaces［第2巻，第2版，1915, Livre IV, chap. IV 等］

(2) Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, in Linear Partial Differential Equations, Yale Univ. Press, 1923 [Dover Publications, 1952]
(3) S. L. Sobolev, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, (Chap. III), American Math. Soc. 1963 [Tokyo Univ. International Edition, No.7]
(4) 鬼頭, 偏微分方程式, ダイヤモンド社, 1968 (才17章)

B 非線形偏微分方程式に関して

(1) W. F. Ames, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, 1967.
(2) " ", Nonlinear Problems of Engineering, ", 1964.
(3) " , Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, ", 1965.
(4) A. Jeffrey - T. Taniuti, Nonlinear

Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, 1964.

〈以上〉