数理解析研究所講究録
70巻 1969年 35-46

2次形式の速度分布函数に対する LIOUVILLE 方程式の解

京大 理 清水 彊

§1 2次形式の速度分布函数に対する Liouville 方程式の解は，Eddington (1915)，Jeans (1915) 以来 Schiveshwarkar (1936)，Chandrasekhar (1940, 1941) などにより求められており，恒星系力学の問題に応用されている。というのは，恒星系内の恒星の速度は Maxwellian 型で近似できると考えられるので，最初は速度成分の自乗項のみという簡単なものから最後には最も一般的な速度の2次形式の速度分布まで調べられた。そして，時間 t を含む非定常の場合は Chandrasekhar によって始めて取扱われた。しかし，これまでの結果は，いずれも恒星系がある簡単な対称性を保持するとの条件の下でえられたものである。

この研究の目的は，恒星系が対称性を保持するとの条件をはずせばどうなるかを吟味することにある。楕円星系などをも含めたいろいろの恒星系についての情報が，これによってある程度えられるのではないかとの予想からである。この結果

まだなお進行中であるが、以下にその２，３の予報的結果を示す。

§2　恒星系の重心を原点とする球面座標系をとった場合を考える。ある点 (r, θ, φ) における r-, θ-, φ 方向の線速度成分をそれぞれ Π, Θ, Φ としたとき、恒星系内におけるそれらの頻度分布は次の函数形で与えられるものと仮定する。

$$(1)\quad F = F(-Q) \quad Q \equiv h(\Pi-\Pi_0)+k(\Theta-\Theta_0)+l(\Phi-\Phi_0)+2m(\Theta-\Theta_0)(\Phi-\Phi_0)$$
$$+2p(\Pi-\Pi_0)(\Theta-\Theta_0)+2q(\Pi-\Pi_0)(\Phi-\Phi_0).$$

但し、h, k, l, m, p, q；Π_0, Θ_0, Φ_0 は座標 r, θ, φ および時間 t の函数である。

球面座標系に対する Liouville 方程式を書けば

$$(2)\quad \frac{\partial F}{\partial t}+\Pi\frac{\partial F}{\partial r}+\Theta\frac{\partial F}{r\partial\theta}+\Phi\frac{\partial F}{r\sin\theta\partial\varphi}+\left(\frac{\Theta^2+\Phi^2}{r}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\frac{\partial F}{\partial\Pi}$$
$$+\left(-\frac{\Pi\Theta}{r}+\frac{\Phi^2}{r}\cot\theta+\frac{\partial\Omega}{r\partial\theta}\right)\frac{\partial F}{\partial\Theta}+\left(-\frac{\Pi\Phi}{r}-\frac{\Theta\Phi}{r}\cot\theta+\frac{\partial\Omega}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)\frac{\partial F}{\partial\Phi}=0$$

となる。但し、Ω はポテンシャル函数である。

問題は、F が(2)を満たすように $h, k, \cdots, \Phi_0$ を r, θ, φ, t で表わせ、ということになる。

まず、(1)を(2)に代入すると、Π, Θ, Φ に関する最高次が3次の20項からなる多項式がえられる。よって、それぞれの係数を零とおけば、$h, k, \cdots, \Phi_0$ についての20組の1次偏微分方程式が導かれ、これらから $h, k, \cdots, \Phi_0$ および Ω が求まるはずである。しかし、実際にやるとなるとかなり面倒である。

§3　前の結果をまとめると次のようになる。

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
h &= H - h_{2\varphi}(1-\cos 2\theta) + h_\varphi \sin 2\theta \\
k &= \{H - h_{2\varphi}(1+\cos 2\theta) - h_\varphi \sin 2\theta\} + r(b_{2\varphi}\cos\theta - 2b_\varphi \sin\theta) + r^2(K + k_{2\varphi}) \\
l &= (H - 4h_{20} + 2h_{2\varphi}) + r\{(2b_{20} - b_{2\varphi})\cos\theta - 2(b_\varphi + c'_\varphi)\sin\theta\} \\
&\qquad + r^2\{(K + k_{20}) - \tfrac{1}{2}k_{2\varphi}(1+\cos 2\theta) + k'_\varphi \sin 2\theta\} \\
2m &= (-2h'_{2\varphi}\cos\theta - 2h'_\varphi \sin\theta) + r\{(-c_{20} + \tfrac{1}{4}b'_{2\varphi}) + (c_{20} + \tfrac{1}{4}b'_\varphi)\cos 2\theta - c_\varphi \sin 2\theta\} \\
&\qquad + r^2(k'_{2\varphi}\cos\theta + 2k_\varphi \sin\theta). \\
2p &= (2h_\varphi \cos 2\theta - 2h_{2\varphi}\sin 2\theta) + r(2b_\varphi \cos\theta + b_{2\varphi}\sin\theta) \\
2q &= (2h'_\varphi \cos\theta - 2h'_{2\varphi}\sin\theta) + r\{(-c_\varphi + 2b'_\varphi) + c_\varphi \cos 2\theta + (c_{20} + \tfrac{1}{4}b'_{2\varphi})\sin 2\theta
\end{aligned}
\right.
$$

但し、 $\frac{\partial a}{\partial\varphi} \equiv a'$, また

$$
\left\{
\begin{aligned}
& h_{2\varphi} \equiv h_{20}(t) + h_{21}(t)\cos 2\varphi + h_{22}(t)\sin 2\varphi, \quad h_\varphi \equiv h_{11}(t)\cos\varphi + h_{12}(t)\sin\varphi \\
& b_{2\varphi} \equiv b_{20}(t) + b_{21}(t)\cos 2\varphi + b_{22}(t)\sin 2\varphi, \quad b_\varphi \equiv b_{11}(t)\cos\varphi + b_{12}(t)\sin\varphi \\
& H \equiv H(t), \quad K \equiv K(t), \quad c_{20} \equiv c_{20}(t) \quad\quad c_\varphi \equiv c_{11}(t)\cos\varphi + c_{12}(t)\sin\varphi \\
& k_{2\varphi} \equiv k_{20}(t) + k_{21}(t)\cos 2\varphi + k_{22}(t)\sin 2\varphi, \quad k_\varphi \equiv k_{11}(t)\cos\varphi + k_{12}(t)\sin\varphi
\end{aligned}
\right.
$$

$\mho_0, \omega_0, \Phi_0$ は個別には導かれないが

$$
(4)\qquad \Delta_1 \equiv h\mho_0 + p\omega_0 + q\Phi_0, \quad \Delta_2 \equiv p\mho_0 + k\omega_0 + m\Phi_0, \quad \Delta_3 \equiv q\mho_0 + m\omega_0 + l\Phi_0
$$

とおくと、これらは次のように表わされる。

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
2\Delta_1 &= (a_0\cos\theta + a_\varphi \sin\theta) + r\{\dot H - \dot h_{2\varphi}(1-\cos 2\theta) + \dot h_\varphi \sin 2\theta\} \\
2\Delta_2 &= (-a_0\sin\theta + a_\varphi \cos\theta) + r(d_\varphi - \dot h_{2\varphi}\sin 2\theta + \dot h_\varphi \cos 2\theta) + r^2(\dot b_{2\varphi}\sin\theta + 2\dot b_\varphi \cos\theta) \\
2\Delta_3 &= a'_\varphi + r\{(\dot h'_\varphi - d_\varphi)\cos\theta + (d - \dot h'_{2\varphi})\sin\theta\} + r^2\{2\dot b'_\varphi - \dot c_\varphi(1-\cos 2\theta) + (\dot c_{20} + \tfrac{1}{4}\dot b'_{2\varphi})\sin 2\theta\}
\end{aligned}
\right.
$$

但し、 $\frac{\partial a}{\partial t} \equiv \dot a$, また

$$a_\varphi \equiv a_{11}(t)\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi,\quad a_0 \equiv a_0(t)\ ;\ d_\varphi \equiv d_{11}(t)\cos\varphi + d_{12}(t)\sin\varphi,\quad \lambda = \lambda(t)$$

物理的には，$r=0$ で $U_0=\Theta_0=\Phi_0=0$ と考えるべきであるから(5)において a_0, a_φ は零とみなす。ポテンシャル函数 $\mathfrak{B}$ については，　$U_0\Delta_1+\Theta_0\Delta_2+\Phi_0\Delta_3=X$ とおくと，

$$(6)\quad \begin{cases} h\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial r}+p\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\partial\theta}+q\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\sin\theta\partial\varphi}=\dfrac{\partial\Delta_1}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial X}{\partial r}\\[2mm] p\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial r}+k\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\partial\theta}+m\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\sin\theta\partial\varphi}=\dfrac{\partial\Delta_2}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial X}{r\partial\theta}\\[2mm] q\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial r}+m\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\partial\theta}+l\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\sin\theta\partial\varphi}=\dfrac{\partial\Delta_3}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial X}{r\sin\theta\partial\varphi}\\[2mm] \Delta_1\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial r}+\Delta_2\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\partial\theta}+\Delta_3\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{r\sin\theta\partial\varphi}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial X}{\partial t}\end{cases}$$

から求められる。$\mathfrak{B}$ がわかると，Poisson の方程式から恒星系内の密度 $\rho(r,\theta,\varphi;t)$ が導かれる。すなわち，

$$(7)\quad -4\pi G\rho=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial r}+\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial\mathfrak{B}}{r\partial\theta}+\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi^2}\quad (G：万有引力常数)$$

§4　(1)式の F が Ⅰ のどんな函数形であるのか不明であっても，恒星系のポテンシャル函数 $\mathfrak{B}$，したがって恒星系の密度分布 $\rho(r,\theta,\varphi;t)$ が求まるのは，各点における速度成分の平均値にあたる U_0, Θ_0, Φ_0 が悉く零とならない場合であることは，(4)式と X の表現式を参照して(6)を見れば明らかである。この場合には，恒星系のポテンシャル・エネルギーは求まるが，運動エネルギーの方は F の函数形を与えないとわからない。

F の函数形として，一般に e^{-I} が採用されているが，筆者

が当ってみた2,3の例については，このようにとると恒星系の全質量は無限大になってしまう。これは，無限大の速度をもつ恒星の確率が零でないことに対応するとも考えられるが，球状対称の恒星系については，逃脱速度以上の速度を trancate した場合にもこのことが起りうるから，有限質量の恒星系については，いわゆる Maxwellian 型の速度分布が適当でなさそうである。そこで考えられるのは，F を U の多項式として近似することである。勿論，この場合逃脱速度以上の速度を trancate しなければならない。原理的には，既知の ρ から

$$(8) \qquad \rho = \int_{|\mathbf{V}|=0}^{|\mathbf{V}|=\sqrt{2\phi/r}} F(\mathbf{V})\, d\mathbf{V}, \qquad \mathbf{V}(U, V, W)$$

を解けば $F(\mathbf{V})$ が求まるわけであるが，実際にこの積分方程式から $F(\mathbf{V})$ の具体的な形をきめることは殆んど不可能である。しかし，$r \to 0$ のとき $\phi \to \phi_0 + \phi_2 r^2 + \phi_3 r^3 + \cdots$，また $r \to \infty$ のとき $\phi \to \frac{\phi_1}{r} - \frac{\phi_2'}{r^2} + \cdots$ となるはずであるから，(7) から

$$(9) \quad \begin{cases} r \to 0 \text{ のとき} & \rho \to 6\phi_2 + 12\phi_3 r + \cdots \\ r \simeq R \text{ のとき} & \rho \to -6\phi_2'/r^4 \cdots \end{cases} \qquad (R:\ \text{恒星系の半径})$$

となる。これを考慮に入れて $F = \sum_{i=k_1}^{k_2} \alpha_i U^i$ における k_1, k_2 および α_i を trial and error で近似することが可能である。

§5　さて，以上の結果が観測されている恒星系に適用できるかどうかを見るには，いろいろな場合について近似的な

具体的な表現式を求めなければならない。その手初めとして，ここではまず円板に近い恒星系について考察する。

今までに挙げた諸式において，$\theta=90^\circ$とおき2次元にreduceした後，(3)および(4)の記号を次のように書き改める。

$$
(10)\begin{cases}
(H-2h_{20}) \longrightarrow H(t), \quad (b_\varphi + C_\varphi) \longrightarrow b_\varphi \equiv b_1(t)\cos\varphi + b_2(t)\sin\varphi, \\
(K+k_{20}) \longrightarrow K:\ \text{const.}, \quad (h_{2\varphi}-h_{20}) \longrightarrow h_{2\varphi} \equiv h_1(t)\cos 2\varphi + h_2(t)\sin 2\varphi \\
\text{ただし，}\quad \dfrac{\partial a}{\partial\varphi} \equiv a', \quad \dfrac{\partial a}{\partial t} \equiv \dot{a}\ ; \quad 0 \le \dfrac{Kr^2}{H+Kr^2} \equiv \gamma \le 1.
\end{cases}
$$

そうすれば，(3)および(5)は

$$
(3')\begin{cases}
h = H\left(1-\dfrac{2h_{2\varphi}}{H}\right), \\
l = H\left(\dfrac{1}{1-\gamma} + 2\dfrac{h_{2\varphi}-\gamma b_\varphi}{H}\right), \\
q = H\left(\dfrac{-h'_{2\varphi}+\gamma b'_\varphi}{H}\right).
\end{cases}
$$

$$
(5')\begin{cases}
\Delta_1 = \dfrac{2\gamma}{2}\left(\dfrac{\dot{H}}{2} - 2\dfrac{\dot{h}_{2\varphi}}{2}\right) \\
\Delta_3 = \dfrac{2\gamma}{2}\left(1 + \dfrac{-\dot{h}'_{2\varphi} + 2\gamma \dot{b}'_\varphi}{2}\right)
\end{cases}
$$

の如く簡単になる。

よって，(4)から$\mho_0$とΦ_0，(6)の第1と第3式から$\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}$と$\dfrac{\partial\Omega}{r\partial\varphi}$が求まる。reduceされた(6)の第4式は，こうして導かれたポテンシャル函数への付加条件とはならず，identicallyに成立つことが証明できる。かくて，reduceされた(7)式から密度ρがえられる。ただし，(7)式を形式的にreduceすれば，$\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}$の係数は2となるが，$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}$のreductionからの影響で，1に変わるので円柱座標系の$\Delta\Omega$からのreductionと一致する。

§6　前節の如き簡単な場合でも厳密な扱いは難かしい。それ故，まず $h_{2\varphi}$, rb_φ に関する線型近似の場合について考察してみる。途中の面倒な演算は省略して，平均速度の成分にあたる U_0 と Ξ_0 および重力の成分 $-\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ と $-\frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi}$ を示すと，

$$(11)\begin{cases} U_0=\frac{Lr}{2H}\left\{\frac{\dot H}{L}-2\frac{\dot h_{2\varphi}}{L}+(1-Y)\frac{h'_{2\varphi}-rb'_\varphi}{H}+\frac{2\dot H}{L}\frac{h_{2\varphi}}{H}\right\}, \\ \Xi_0=\frac{(1-Y)Lr}{2H}\left\{1-\frac{\dot h'_{2\varphi}-2r\dot b'_\varphi}{L}-2(1-Y)\frac{h_{2\varphi}-rb_\varphi}{H}+\frac{\dot H}{L}\frac{h'_{2\varphi}-rb'_\varphi}{H}\right\}. \end{cases}$$

$$(12)\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{\dot L r}{2H}\left\{\frac{\ddot H}{\dot L}-2\frac{\ddot h_{2\varphi}}{\dot L}+2\frac{\ddot H}{\dot L}\frac{h_{2\varphi}}{H}+(1-Y)\frac{h'_{2\varphi}-rb'_\varphi}{H}\right\}-\frac{L^2r}{4H^2}(1-Y)^2\Big\{1+\frac{1}{(1-Y)^2}\frac{\dot H^2}{L^2}-\frac{4}{(1-Y)^2}\frac{\dot H}{L}\frac{\dot h_{2\varphi}}{L} \\ \qquad -\frac{2\dot h'_{2\varphi}}{L}+2\left(3+\frac{Y}{1-Y}\right)\frac{r\dot b'_\varphi}{L}+4\left(Y+\frac{1}{(1-Y)^2}\frac{\dot H^2}{L^2}\right)\frac{h_{2\varphi}}{H}+2\frac{\dot H}{L}\frac{h'_{2\varphi}}{H}+(3-4Y)\frac{rb_\varphi}{H}-\left(3+\frac{Y}{1-Y}\right)\frac{\dot H}{L}\frac{rb'_\varphi}{H}, \\ \frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi}=\frac{(1-Y)\dot L r}{2H}\left\{1-\frac{\ddot h'_{2\varphi}-2r\ddot b'_\varphi}{\dot L}-2(1-Y)\frac{h_{2\varphi}-rb_\varphi}{H}+\frac{\ddot H}{\dot L}\frac{h'_{2\varphi}-rb'_\varphi}{H}\right\}-\frac{L^2r}{4H^2}(1-Y)^2\Big\{\frac{4\dot h_{2\varphi}-2r\dot b_\varphi}{L}-\frac{2}{1-Y}\frac{\dot H}{L}\frac{\dot h'_{2\varphi}}{L} \\ \qquad -\frac{\dot H}{L}\frac{4h_{2\varphi}-rb_\varphi}{H}+\frac{1}{(1-Y)^3}\left(\frac{\dot H}{L}\right)^2\frac{2h'_{2\varphi}-rb'_\varphi}{H}\Big\} \end{cases}$$

上の (12) 式から $\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi}$ の identity が成立つ条件を求めると，$\cos\varphi$ および $\sin\varphi$ の係数から，

$$(13)\begin{cases} \dot b_1-\frac{\dot H}{2H}b_1+\frac{L}{2H}b_2=0, \\ \dot b_2-\frac{\dot H}{2H}b_2-\frac{L}{2H}b_1=0, \end{cases}\quad \begin{cases} \ddot b_2-\frac{\ddot H}{2H}b_2+\frac{\dot H^2}{4H^2}b_2-\frac{L}{2H}\dot b_1+\frac{L\dot H}{4H^2}b_1=0, \\ \ddot b_1-\frac{\ddot H}{2H}b_1+\frac{\dot H^2}{4H^2}b_1+\frac{L}{2H}\dot b_2-\frac{L\dot H}{4H^2}b_2=0. \end{cases}$$

また，$\cos 2\varphi$ および $\sin 2\varphi$ の係数からは

$$(14)\begin{cases} \dot h_1-\frac{\dot H}{H}h_1+\frac{L}{2H}h_2=0, \\ \dot l_{12}-\frac{\dot H}{H}l_{12}-\frac{L}{2H}h_1=0, \end{cases}\quad \begin{cases} \ddot l_{12}-\frac{\ddot H}{H}l_{12}-\frac{\dot H}{H}\dot l_{12}+\frac{\dot H^2}{H^2}l_{12}=0, \\ \ddot h_1-\frac{\ddot H}{H}h_1-\frac{\dot H}{H}\dot h_1+\frac{\dot H^2}{H^2}h_1=0. \end{cases}$$

さらに三角函数を含まない項から，$\dot L=0$ or $L=\mathrm{const.}$ が出る。

(13) の右側はその左側から誘導できるから，左側だけを考えればよい。$b_1=b(t)\sin\gamma_1(t)$, $b_2=b(t)\cos\gamma_1(t)$ とおき (13) に代入すれば，

$$(15)\quad b=b_0\sqrt{\frac{H(t)}{H_0}},\qquad \dot\gamma_1=-\frac{L}{2H(t)},\qquad b_0,\ H_0,\ L:\mathrm{const.}.$$

とえる。

また，(14)の左側に，$h_1=h(t)\sin\gamma_2(t)$，$h_2=h(t)\cos\gamma_2(t)$ を代入すれば同様に

$$(16)\qquad h=h_0\frac{H(t)}{H_0},\quad \dot{\gamma}_2=-\frac{L}{2H(t)},\quad h_0:\mathrm{const.}$$

をえるが，これらを(14)の右側に代入すると，$\frac{L^2}{4H^2}h=0$ すなわち，$L=0$ または $h=0$ となる。よって，線型近似では $L=0$，すなわち(11)の廻転速度項が振動項しか含まぬならば，$h=h_0\frac{H(t)}{H_0}$，γ_2: const. であるが，L: const. $\neq 0$ の場合には $h_{2\varphi}$ の振動は消えるはずである。しかし，予備的な2次型式近似の計算結果では，(13)が不変であるのは勿論として，(14)の各式の右辺は予想のように零ではなく b_φ と b_φ の積を含む項となる。ここでは簡単のため L: const. $\neq 0$ の場合にも(16)が成立つことを仮定しよう。（近似を高めていっても以下の結果の大筋は変わらないから）

さて，(12)から $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$，$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$ を導き，(15)，(16)を考慮して Poisson の式を作れば，b_1，b_2 また h_1，h_2 の係数はそれぞれ相等しくなり，

$$(17)\qquad 4\pi G\rho=-\frac{\ddot{H}}{H}+\frac{\dot{H}^2}{2H^2}+\frac{L^2}{2H^2}(1-Y)^2(1-2Y)+\frac{L^2Y(1-Y)^2}{4H^2}\left[1-8(1-Y)+24(1-Y)^2\right]b_\varphi$$
$$+\frac{L^2Y}{2H^3}\left[12(1-Y)^3-1\right]h_{2\varphi},\qquad b_\varphi=b\sin(\varphi+\gamma_1),\ h_{2\varphi}=h\sin(2\varphi+\gamma_2)$$

が求まる。上式において，1次および2次の harmonics で表わされている振動項を除くと，円対称の円盤恒星系の密度分布を示す式と一致し，特にそれが定常状態にあればその限界半径 R は $(1-2Y)=0$ より $R=\frac{H}{L}$ で与えられる。

§7 線型近似の段階ではH(t)の関数形はきまらないから，2，3の単純な関数形を仮定し，前節の結果についての物理的な意味について簡単に触れておこう。(15)と(16)において，

(i) $H=H_0$：const. の場合

$$b=b_0,\ h=h_0;\quad \gamma_1-\gamma_{10}=\gamma_2-\gamma_{20}=-\omega_a t$$

$$\left(b_0,\ h_0,\ \gamma_{10},\ \gamma_{20},\ \omega_a\equiv\frac{1}{2H_0}:\ \text{consts.}\right)$$

(ii) $H=H_0(1+\alpha e^{\lambda t})$; $0<\alpha<1$, λ: consts. の場合

$$b=b_0\sqrt{1+\alpha e^{\lambda t}},\quad h=h_0(1+\alpha e^{\lambda t});$$

$$\gamma_1-\gamma_{10}=\gamma_2-\gamma_{20}=-\omega_a t+\frac{\omega_a}{\lambda}\log(1+\alpha e^{\lambda t})$$

(iii) $H=H_0(1+\alpha\sin\lambda t)$; $0<\alpha<1$, λ: consts. の場合

$$b=b_0\sqrt{1+\alpha\sin\lambda t},\quad h=h_0(1+\alpha\sin\lambda t);$$

$$\gamma_1-\gamma_{10}=\gamma_2-\gamma_{20}=-\frac{2\omega_a}{\lambda\sqrt{1-\alpha^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\lambda t}{2}\right)+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right),$$

特に，$0<\alpha\ll 1$ なら　$\gamma_1-\gamma_{10}=\gamma_2-\gamma_{20}\fallingdotseq-\omega_a t+\frac{\alpha}{\lambda}\omega_a\cos\lambda t$.

となる。Local centroid の中心の周りの角速度ωは $\omega=\frac{1}{r}\int\Phi F(\ell)dV$ で表わされるから，Φの平均値がΦ₀とみれば（$\Phi_0=\int\Phi F(\ell)dV$ となるようにF(ℓ)を定めることは可能），$\omega=\frac{\Phi_0}{r}\fallingdotseq\frac{1}{2H}(1-Y)$ と書けまた $\varphi\fallingdotseq\omega t+\varphi_0$ とおくことができる。簡単のために，$\varphi_0=0$ にとれば前節の(iv)における b_φ および $h_{2\varphi}$ における sin 内の arguments は，ωtと上表のγとの和で表わされる。

したがって，Yを一定にしたとき ρ＝一定の部分は，例えば上表の(i)の場合には，角速度が b_φ につき $\omega-\omega_a\fallingdotseq-\frac{1}{2H_0}Y=-\frac{2hY^2}{2H_0(H_0+hY^2)}$

また$b_{2\varphi}$につき$\omega-\frac{\omega_a}{2}\fallingdotseq\frac{\lambda}{4H_0}(1-2r)=\frac{\lambda(H-Kr^2)}{4H_0(H+Kr^2)}$をもって進行する。すなわち，$b_\varphi$については中心$(r=0)$では$\omega-\omega_a=0$，限界半径$R$のところでは$\omega-\omega_a=-\frac{\omega_a}{4}$となってleading armができ，$b_{2\varphi}$については$r=0$では$\omega-\frac{\omega_a}{2}=\frac{\omega_a}{4}$また$r=R$では$\omega-\frac{\omega_a}{2}=0$となってtrailing armができる。(iii)の場合にはρや角速度が週期的で振動するが，平均的には(i)の場合と同じことがいえる。また(ii)の場合には，$\lambda>0$なら角速度は時間とともに(i)の場合よりも増していき，$\lambda<0$なら減じていくことになる。

さて，$t=0$のとき振動による密度変化$\Delta\rho$の極大が棒状の腕となり，$b_0\neq0$なら$\varphi=90^\circ-\delta_{10}$の方向の半径に沿い，また$b_0\neq0$なら$\varphi=\frac{1}{2}(90^\circ-\delta_{20})$方向とその反方向に延びた直径に沿って現われうることは前表のいずれの場合にも可能である。そして，この腕のpatternは時が経つにつれて恒星系の微分回転によって曲げられていき，次第に巻き数の多い渦状の腕に変化していく。その渦状がleadingとなるかtrailingになるかは上述のように振動の起り方によるが，2本のarmsについては多くの場合trailingであろう。なお，前表(ii)の場合に$\lambda t_1>0$が十分大きく$\log(1+\alpha e^{\lambda t_1})\fallingdotseq\log\alpha+\lambda t_1$となれば$\delta_1-\delta_{10}=\delta_2-\delta_{20}\fallingdotseq0$となるから，初期に渦状構造が作られていても，この時間t_1に至るまでに渦状構造は微分回転により崩壊されていることであろう。

以上のごとき円盤状恒星系の力学的モデルでは，Lindblad

のいわゆる密度波の運動と[illegible]考えたが、数[illegible]により棒状、渦状の腕ができることになる。直径に沿う2本の棒状の腕が中心と周縁との間で2本のそれぞれの腕を1巻きするに要する時間は $\frac{8\pi}{\omega_a}$ である。この年数を銀河系の太陽付近における観測値（$\Phi_0 \sim 250\ \mathrm{pc}/10^6\ \mathrm{yr}$, $r \sim 10^4\ \mathrm{pc}$, $1-Y=\frac{H}{H+KY^2}\sim 0.4$）から概算すると、$\omega_a \sim 0.06\ 1/10^6\ \mathrm{yr}$ だから $4\times10^8\ \mathrm{yr}$、すなわち2回の銀河回転にあたる年数となる。これはB型からA型に移る段階にある主系列星のlife-timeにあたる。よって、主系列星の晩期型星の空間分布に渦状構造が認められないのは、長い年数が経ち渦状の巻き数が多くなり渦状の腕の間隔が実際上なくなったためと考えることができる。