数理解析研究所講究録
72巻 1969年 69-82

非線型連立方程式の大域における数値解法

徳大・工短　篠原能材

§1. Basis of the method

非線型連立方程式

(1.1)　$F(x) = \{ f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$

の数値解を求める一つの方法を考える。

仮定

(i) 方程式系(1.1)の各函数 f_k は，n 次元空間 R^n の或る領域 D 内で定義されており，arguments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について領域 D 内で連続であり，各 argument についての一階の偏導函数はすべて存在して連続であるとする。

(ii) 方程式系(1.1)は領域 D 内で解 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ を持っているものとする。

(iii) $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ は領域 D に含まれる，$(n-1)$ 個の方程式系

(1.2)
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases},$$

の一つの解であるとし，領域D内のある有界部分領域Ω(Ωは点$P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$および点$Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$を共に含む）において，函数行列式

$$J(x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda) = \frac{D(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})}{D(x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda)},$$

$$\left(\begin{array}{l}\alpha, \beta, \cdots, \lambda \text{ は } 1, 2, \cdots, n \text{ の中の}(n-1)\text{個の互} \\ \text{に異なる番号}\end{array}\right)$$

のうち，少なくとも一つは零に等しくないものとする。

上述の三つの仮定の下で，陰函数の定理によって存在を保証される曲線は，Ω内では特異点をもたないので曲線のパラメータとして弧長Sを用いて

$$\begin{cases} x_1 = x_1(S), \\ x_2 = x_2(S), \\ \vdots \\ x_n = x_n(S), \end{cases}$$

と表わすことができ，$S=0$のとき点$P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$を通る。 (1.2)の両辺を$S$で微分すれば，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{dx_1}{dS} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{dx_2}{dS} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\cdot\dfrac{dx_n}{dS} = 0, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{dx_1}{dS} + \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{dx_2}{dS} + \cdots + \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\cdot\dfrac{dx_n}{dS} = 0, \end{cases}$$

ただし，

$$\left(\frac{dx_1}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dS}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dS}\right)^2 = 1. \tag{1.3}$$

行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dS} & \frac{dx_2}{dS} & \cdots & \frac{dx_n}{dS} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

において，dx_i/dS の余因数を D_i とおけば，仮定（iii）および（1.3）を用いて，

(1.4)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dS} = \lambda D_1 \\ \dfrac{dx_2}{dS} = \lambda D_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dS} = \lambda D_n , \end{cases}$$

ただし，

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}}$$

を得る。

常微分方程式系（1.4）を初期条件 $S=0$ のとき $x_i = x_i^{(0)}$, $i=1,2,\cdots n$ の下で，Step by step に数値積分を進行させる。そして，第 l th Step において得られた数値解を

$$x_i = \hat{x}_i^{(l)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

とおく。十分に小さく与えられた正数 ε（ε は数値積分の精度にとるとよい）に対して

(1.5)
$$f_n(\hat{x}_1^{(l-1)}, \hat{x}_2^{(l-1)}, \cdots, \hat{x}_n^{(l-1)}) \cdot f_n(\hat{x}_1^{(l)}, \hat{x}_2^{(l)}, \cdots, \hat{x}_n^{(l)}) \leqq 0$$

かつ,

$$(1.6)\quad \begin{cases} |f_n(\hat{x}_1^{(l-1)}, \hat{x}_2^{(l-1)}, \cdots, \hat{x}_n^{(l-1)})| \leqq \varepsilon, \\ \text{またわ} \\ |f_n(\hat{x}_1^{(l)}, \hat{x}_2^{(l)}, \cdots, \hat{x}_n^{(l)})| \leqq \varepsilon, \end{cases}$$

となるような数値解

$$(1.7)\quad x_i = \hat{x}_i^{(l-j)} \quad ; i = 1, 2, \cdots, n \ , \ j = 0, 1$$

を求める。

得られた数値解(1.7)に対して,簡単に計算可能な残差$\|F(x)\|$を用いての誤差評価法は,すでに,URABE [2] によって与えられている。すなわち,

URABE'S PROPOSITION

数値解$\hat{x}$に対して,函数行列式$J(\hat{x}) \neq 0$であり,適当な正数δとnon-negative $K < 1$が存在して

$$D_\delta = \{x \ ; \|x - \hat{x}\| < \delta\} \subset D,$$

$$\|J(x) - J(\hat{x})\| \leqq \frac{K}{M} \quad \text{for any } x \in D_\delta,$$

$$\frac{M \cdot r}{1-K} \leqq \delta,$$

ただし,

$$r = \|F(\hat{x})\|, \quad M = \|J^{-1}(\hat{x})\|$$

のときは,方程式系(1.1)はD_δで,ただ一つの解$\bar{x}$をもち,かつ,

$$(1.8)\quad \|\hat{x} - \bar{x}\| \leqq \frac{M \cdot r}{1-K}$$

が成立する。

§2. Numerical examples

[A].

代数方程式

$$z^5 - 2z^4 + 10z^3 - 9z + 3 = 0 \tag{2.1}$$

の根を求めることを考える。(UNO [1]).

$$z = x + iy$$

とおけば，(2.1) は連立方程式

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y) = 0\ , \\ f_2(x, y) = 0 \end{array}\right. \tag{2.2}$$

，ただし，

$$f_1(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 2x^4 + 12x^2y^2 - 2y^4 + 10x^3 - 30xy^2 - 9x + 3\ ,$$

$$f_2(x, y) = y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y - 8x^3y + 8xy^3 + 30x^2y - 10y^3 - 9y\ ,$$

に帰着される。

計算結果は，

$$z = \begin{array}{l} -0.9691573277, \\ 0.3997906784, \\ 0.7374430457, \\ 0.9159618019 + 3.1081258666i, \\ 0.9159618019 - 3.1081258666i \end{array} \tag{2.3}$$

である．

誤差評価；

$z = 0.3997906784$ の場合．

$$\mathbb{F}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\hat{x}, \hat{y}) \\ f_2(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2910383046 \times 10^{-10} \\ 0.3795507282 \times 10^{-22} \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad r = \| \mathbb{F}(\hat{x}) \| = 0.2910383046 \times 10^{-10},$$

$$\mathbb{J}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4588486751 \times 10 & 0 \\ 0 & -0.4588486751 \times 10 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad \Delta = | \mathbb{J}(\hat{x}) | = (0.4588486751 \times 10)^2,$$

$$\mathbb{J}^{-1}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{f_{2y}}{\Delta} & -\dfrac{f_{1y}}{\Delta} \\ -\dfrac{f_{2x}}{\Delta} & \dfrac{f_{1x}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad M = \| J^{-1}(\hat{x}) \| \leqq 0.3082091414,$$

(2.4) $$D_\delta = \{ (x, y) \; ; \; |x - \hat{x}| \leqq H, \; |y - \hat{y}| \leqq H \; , \; H = 1/16 \}$$

とおけば

$$\delta = \sqrt{2} H = 0.0883883476 25,$$

他方，

$$\| J(x) - J(\hat{x}) \| \leqq 0.2882004051 \times 10 \quad (\text{for any } x \in D_\delta).$$

$\therefore$

(2.5) $$M \cdot \| J(x) - J(\hat{x}) \| \leqq 0.8882599994 \; .$$

また，

(2.6) $$1 - \frac{M \cdot r}{\delta} > 1 - 0.11 \times 10^{-9}$$

従って，(2.5), (2.6) より

$$K = 0.8882599994$$

とおけば，PROPOSITION の条件はすべて満される。

そして，

$$\frac{M\cdot r}{1-K} < 0.803\times 10^{-10},$$

すなわち，

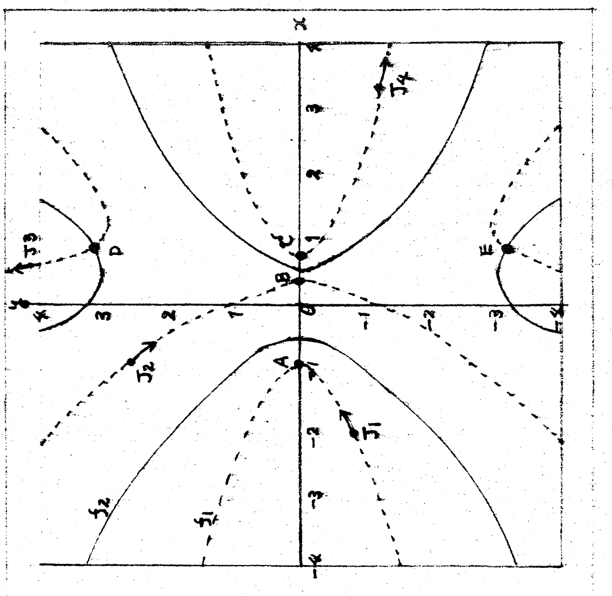
(2.7) $$\|\hat{x}-\bar{x}\| < 0.803\times 10^{-10}$$

を得る。

結論として，与えられた代数方程式(2.1)の解$\bar{x}$は，領域D_δで存在して，ただ一つであり，その近似解$\hat{x}=0.3997906784$の精度は(2.7)で与えられる。

近似解(2.3)の他の解についても同様に評価できる。

〔計算経過説明図〕



A=(−0.9691573277, 0),
B=(0.3997906784, 0),
C=(0.7374430457, 0),
D=(0.9159618019, 3.1081258866),
E=(0.9159618019, −3.1081258866).

〔B〕 日本列島の周辺の地図を作成する際に，歪を極小にする一つの投影法を決定する微分方程式

(2.8) $$\sin^2\theta \frac{d^2r}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{dr}{d\theta} - n^2 r = \sin\theta\cos\theta - n\sin\theta$$

の解のうち，条件

(2.9) $$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\theta=\alpha} = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\theta=\beta} = 1$$

を満す解を求め，次に，parameter n を適当に定めて

条件 1.

(2.10) $$\frac{n\,r(\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{n\,r(\beta)}{\sin\beta},$$

条件 2.

(2.11) $$\Theta\ ;\ \left(\frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}\right)' = 0 \text{ となる } \theta,\ (\alpha < \Theta < \beta),$$

条件 3，4.

(2.12) $$\left(\frac{\frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}{\frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}\right)_{\theta=44^\circ} = \left(\frac{\frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}{\frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}\right)_{\theta=66^\circ}$$

(2.13) $$= -\left(\frac{\frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}{\frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{n\,r(\theta)}{\sin\theta}}\right)_{\theta=\Theta}$$

を満す解を求める必要が生じた。上式において，α，β，n，Θ は未知数である。先づ，(2.8) において，

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

とおけば

(2.14) $$t^2\frac{d^2r}{dt^2} + t\frac{dr}{dt} - n^2 r = \frac{2t-2t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{2nt}{1+t^2}.$$

従って，$t = e^u$ とおけば，(2.14)は

$$\frac{d^2 r}{du^2} - \eta^2 r = \frac{2e^u - 2e^{3u}}{(1+e^{2u})^2} - \frac{2\eta e^u}{1+e^{2u}} \tag{2.15}$$

とかける。そして，

$$r = \cot^\eta \frac{\theta}{2} \int \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

が(2.8)の一つの特殊解であるので，(2.8)の一般解は

$$r = A \tan^\eta \frac{\theta}{2} + B\cot^\eta \frac{\theta}{2} + \cot^\eta \frac{\theta}{2} \int_{x_1}^{\theta} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta \ , \quad x_1 = 55^\circ \tag{2.16}$$

とかける。従って，

$$\frac{dr}{d\theta} = \eta A \tan^\eta \frac{\theta}{2} \Big/ \sin\theta - \eta \left(B + \int_{x_1}^{\theta} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta\right) \Big/ \sin\theta \tan^\eta \frac{\theta}{2} + 1 .$$

上式を用いれば，(2.9)は，

$$A \tan^\eta \frac{\alpha}{2} \Big/ \sin\alpha - B \Big/ \sin\alpha \tan^\eta \frac{\alpha}{2} = \int_{x_1}^{\alpha} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta \Big/ \sin\alpha \tan^\eta \frac{\alpha}{2} ,$$

$$\therefore \quad A \tan^{2\eta} \frac{\alpha}{2} - B = \int_{x_1}^{\alpha} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta ,$$

同様にして，

$$A \tan^{2\eta} \frac{\beta}{2} - B = \int_{x_1}^{\beta} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta .$$

故に，

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta}{\tan^{2\eta} \frac{\beta}{2} - \tan^{2\eta} \frac{\alpha}{2}} , \\ B &= \frac{\tan^{2\eta} \frac{\alpha}{2} \int_{x_1}^{\beta} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta - \tan^{2\eta} \frac{\beta}{2} \int_{x_1}^{\alpha} \tan^\eta \frac{\theta}{2}\, d\theta}{\tan^{2\eta} \frac{\beta}{2} - \tan^{2\eta} \frac{\alpha}{2}} . \end{aligned} \right. \tag{2.17}$$

すなわち，(2.8)の一般解は(2.16)，(2.17)で与えられる。

すると，条件1～4を満す解を求めることは，次の四元の非線型(超越)連立方程式を解くことに帰着される。

$$
(2.18)\quad
\begin{cases}
F_1(\eta, \alpha, \beta) = 0, \\
F_2(\eta, \alpha, \beta, \Theta) = 0, \\
F_3(\eta, \alpha, \beta) = 0, \\
F_4(\eta, \alpha, \beta, \Theta) = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
0 < \eta < 1, \\
40^\circ < \alpha < \beta < 70^\circ, \\
\alpha < \Theta < \beta,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
F_1 = r(\alpha)\sin\beta - r(\beta)\sin\alpha, \\
F_2 = \sin\Theta \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=\Theta} - \cos\Theta \cdot r(\Theta), \\
F_3 = [a(\eta, x) - b(\eta, x)] \cdot [a(\eta, y) + b(\eta, y)] \\
\qquad - [a(\eta, y) - b(\eta, y)] \cdot [a(\eta, x) + b(\eta, x)], \\
F_4 = [a(\eta, y) - b(\eta, y)] \cdot [a(\eta, \Theta) + b(\eta, \Theta)] \\
\qquad + [a(\eta, \Theta) - b(\eta, \Theta)] \cdot [a(\eta, y) + b(\eta, y)],
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a(\eta, \theta) = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \\
\qquad = \eta A \tan^{\eta}\frac{\theta}{2} \Big/ \sin\theta - \eta\left(B + \int_{x_1}^{\theta} \tan^{\eta}\frac{\theta}{2}\, d\theta\right) \Big/ \sin\theta \tan^{\eta}\frac{\theta}{2} \\
\qquad + 1, \\
b(\eta, \theta) = \frac{\eta\, r(\theta)}{\sin\theta}, \\
x = 44^\circ \ (\text{co-latitude}), \\
y = 66^\circ \ (\text{co-latitude}).
\end{cases}
$$

計算結果は次のようになった。

$$
(2.19)\quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7311676067 \\ 1.201858846 \\ 0.5735706625 \\ 0.9534080828 \end{pmatrix},
$$

$$\mathbb{F}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \\ F_3(\hat{x}) \\ F_4(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1455191523 \times 10^{-10} \\ 0.3637978807 \times 10^{-10} \\ 0.4706635082 \times 10^{-10} \\ 0.7139533409 \times 10^{-10} \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad r = \| F(\hat{x}) \| = 0.9406265107 \times 10^{-10},$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} F_{1\alpha} & F_{1\beta} & F_{1\eta} & 0 \\ F_{2\alpha} & F_{2\beta} & F_{2\eta} & F_{2\Theta} \\ F_{3\alpha} & F_{3\beta} & F_{3\eta} & 0 \\ F_{4\alpha} & F_{4\beta} & F_{4\eta} & F_{4\Theta} \end{pmatrix},$$

$$J^{-1}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -0.1193910638 \times 10 & 0.4962025422 \times 10 & -0.3636590463 \times 10 & -0.4033471572 \times 10 \\ -0.2442553447 \times 10 & -0.5973531052 \times 10 & 0.2353527234 \times 10 & 0.4855692108 \times 10 \\ -0.4977735887 \times 10^{-1} & 0.1151113706 \times 10^{0} & 0.4772381296 \times 10^{0} & -0.9357034707 \times 10^{-1} \\ 0.8655175970 \times 10^{-1} & 0.1022006925 \times 10 & -0.8310683846 \times 10^{0} & -0.1196777041 \times 10^{0} \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad M = \| J^{-1}(\hat{x}) \| \leqq 11.32774994,$$

領域 D_δ を

$$D_\delta = \{ x = (\alpha, \beta, \eta, \Theta) ;\ |\alpha - \hat{\alpha}|, |\beta - \hat{\beta}|, |\eta - \hat{\eta}|, |\Theta - \hat{\Theta}| \leqq \tfrac{1}{2} H \},$$

$$H = 1^\circ = 0.0174532925 \text{ radian},$$

とおく。 $\delta = H$.

他方,

$$\| J(x) - J(\hat{x}) \| \leqq 0.0672017896 2 \quad \text{for any } x \in D_\delta.$$

(2.20) $$\therefore \quad M \cdot \| J(x) - J(\hat{x}) \| < 0.761245068 4.$$

また,

(2.21) $$1 - \frac{M \cdot r}{\delta} > 1 - 0.62 \times 10^{-7}.$$

(2.20), (2.21) より

$$K = 0.7612450684$$

とおけば, PROPOSITION の条件はすべて満される。

そして,

$$\| \hat{x} - \bar{x} \| \leqq \frac{M \cdot r}{1-K} < 4.5 \times 10^{-8}$$

を得る。

参考文献

[1] 宇野利雄, 計算機のための数値計算, P.111, 昭和41年.

[2] URABE, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic system, Arch. Rational Mech. Anal. 20, 120-152, 1965.

	出発値	符号変化点	収束点
α	0.8780735065 E+000	0.7127402786 E+000	0.7311676077 E+000
β	0.1018796810 E+001	0.1206217081 E+001	0.1201858845 E+001
Θ	0.9472482022 E+000	0.9442588734 E+000	0.9534080827 E+000
η	0.5834375000 E+000	0.5807454175 E+000	0.5735706625 E+000
F1	-0.17×10^{-9}	-0.51×10^{-3}	0.43×10^{-10}
F2	0.24×10^{-9}	0.46×10^{-3}	-0.72×10^{-11}
F3	0.15×10^{-9}	0.79×10^{-2}	-0.12×10^{-10}
F4	-0.34×10^{-1}	0.11×10^{-3}	-0.74×10^{-10}
		0.7998539537	
		0.8004847218	
		0.9445298029	
		0.5806490856	
		0.90×10^{-4}	
		0.76×10^{-3}	
		0.80×10^{-2}	
		0.72×10^{-3}	
α	0.7982000536 E+000	0.7171003509 E+000	0.7311676069 E+000
β	0.1113003941 E+001	0.1208083201 E+001	0.1201858846 E+001
Θ	0.9496932435 E+000	0.9477230271 E+000	0.9534080828 E+000
η	0.5795312500 E+000	0.5778856116 E+000	0.5735706625 E+000
F1	0.13×10^{-9}	-0.37×10^{-3}	-0.14×10^{-10}
F2	0.14×10^{-9}	0.27×10^{-3}	0.36×10^{-10}
F3	0.18×10^{-9}	0.50×10^{-2}	0.47×10^{-10}
F4	-0.20×10^{-1}	0.10×10^{-2}	0.71×10^{-10}
		0.7853350307 E+000	
		0.7862964615	
		0.9470227826	
		0.5771328590	
		0.15×10^{-3}	
		0.73×10^{-3}	
		0.75×10^{-2}	
		0.11×10^{-1}	

（計算経過説明表）