数理解析研究所講究録
72巻 1969年 35-50

代数方程式の数値実験例

岡山大学理学部電子計算室　川端　親雄

今回は、たまたま、直面した8次の代数方程式を解いた際の数値実験例をここに紹介する。

与えられた代数方程式は下記の如くである。Kを0から可成り大きい値をとる範囲にパラメーターとして数値解を求めた。　（式 1）

$K=0$ のときは $Z=x$ とすれば

$x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1=(1+x)^8$

$=0$ を解くことを意味する。

明らかに、解は $x=-1$ である。

さて、これを Bairstow 法の変形である McAuley 法を使用した結果は図1の如くである。　（図 1）

Bairstow 法では K=0 の際は解けない。K=0.2，0.6 の場合は図 2,3 の如くである。（図2，3）

次によく知られているGaussの方法で追試してみた。

つまり、
$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=1}^{n} a_k z^k + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{ik\varphi} + 1 \qquad (z = re^{i\varphi}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \cos k\varphi + 1\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \sin k\varphi\right) \\
&= u + iv
\end{aligned}
$$

$$
f(z)=0 \longrightarrow \begin{cases} v = \sum_{k=1}^{n} a_k r^k \sin k\varphi = 0 \\ u = \sum_{k=1}^{n} a_k r^k \cos k\varphi + 1 = 0 \end{cases}
$$

今 r=1 として、単位円周上を追跡した結果は図 4.5 の如くである。（図4，5）

今問題としている代数方程式は相反定理を満足しているということに着目して次のような式2に変形して根が単位円周上にあるかどうか調べた。

K=0.01，0.2，0.6 の結果が図 6,7,8 の如くである。

（式2，図6，7，8）

最後に、式は相反定理を満足しているから簡単に4次方程式になる。ところが4次方程式は非常に古くよりFerrariによって解かれているからそれを用いれば $K=0.0, 0.2, 0.6$ については図9,10,11の如くである。（図9, 10, 11）

末筆ながら御討論いただいた立教大学理学部一松信教授、京大数理解析研究所占部実教授に心からの感謝の意を表します。

式 1

$$
\begin{aligned}
Z = {} & (Z^{4} + Z^{-4})\, a_4 \\
& + (Z^{3} + Z^{-3})(a_4 + a_3) \\
& + (Z^{2} + Z^{-2})(a^{4} + a_3 + a_2) \\
& + (Z^{1} + Z^{-1})(a_4 + a_3 + a_2 + a_1) \\
& + (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \\
= {} & 0
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\lambda^{3} + 2\lambda^{2} - 2\lambda - 2 = 0 \\
\quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\
\lambda'^{3} + 5\lambda'^{2} - \lambda' - 9 = 0 \\
\quad (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)
\end{array}
\right\}
$$

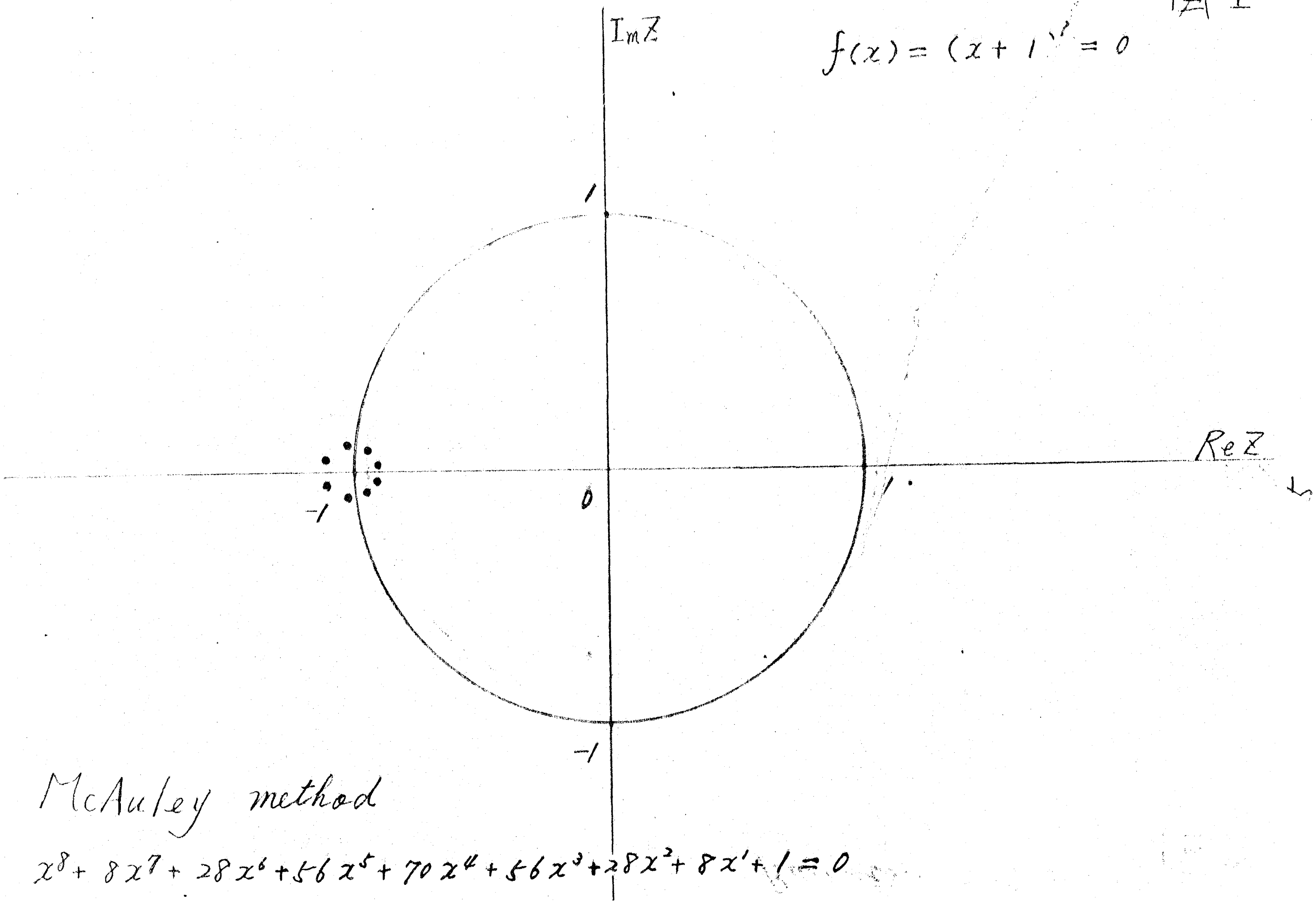
Where

$$
\begin{aligned}
a_4 &= e^{6k} \\
a_3 &= 3e^{4k} + 3e^{2k} + 1 \\
a_2 &= 2e^{2k(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[5]^{1/2})} + 2e^{2k(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[5]^{1/2})} + 3e^{2k} + 3e^{2k(-1)} \\
&\quad + e^{2k(-1+[2]^{1/2})} + e^{2k(-1-[2]^{1/2})} + 3e^{2k} + 3e^{2k(-1)} + 2 \\
a_1 &= 3e^{2k\lambda_1} + 3e^{2k\lambda_2} + 3e^{2k\lambda_3} + 3e^{2k(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[5]^{1/2})} + 3e^{2k(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[5]^{1/2})} \\
&\quad + 1 + 1e^{8k(-1)} + 3e^{2k(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[5]^{1/2})} + 3e^{2k(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[5]^{1/2})} + 3 + 2e^{2k(-1)} \\
a_0 &= 2e^{2k(-1+[2]^{1/2})} + 2e^{2k(-1-[2]^{1/2})} + 1 + 3e^{2k(-1)} + 3e^{4k(-1)} \\
&\quad + e^{2k\lambda'_1} + e^{2k\lambda'_2} + e^{2k\lambda'_3}
\end{aligned}
$$

38

図 1

$f(x) = (x+1)^8 = 0$



McAuley method

$x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x^1 + 1 = 0$

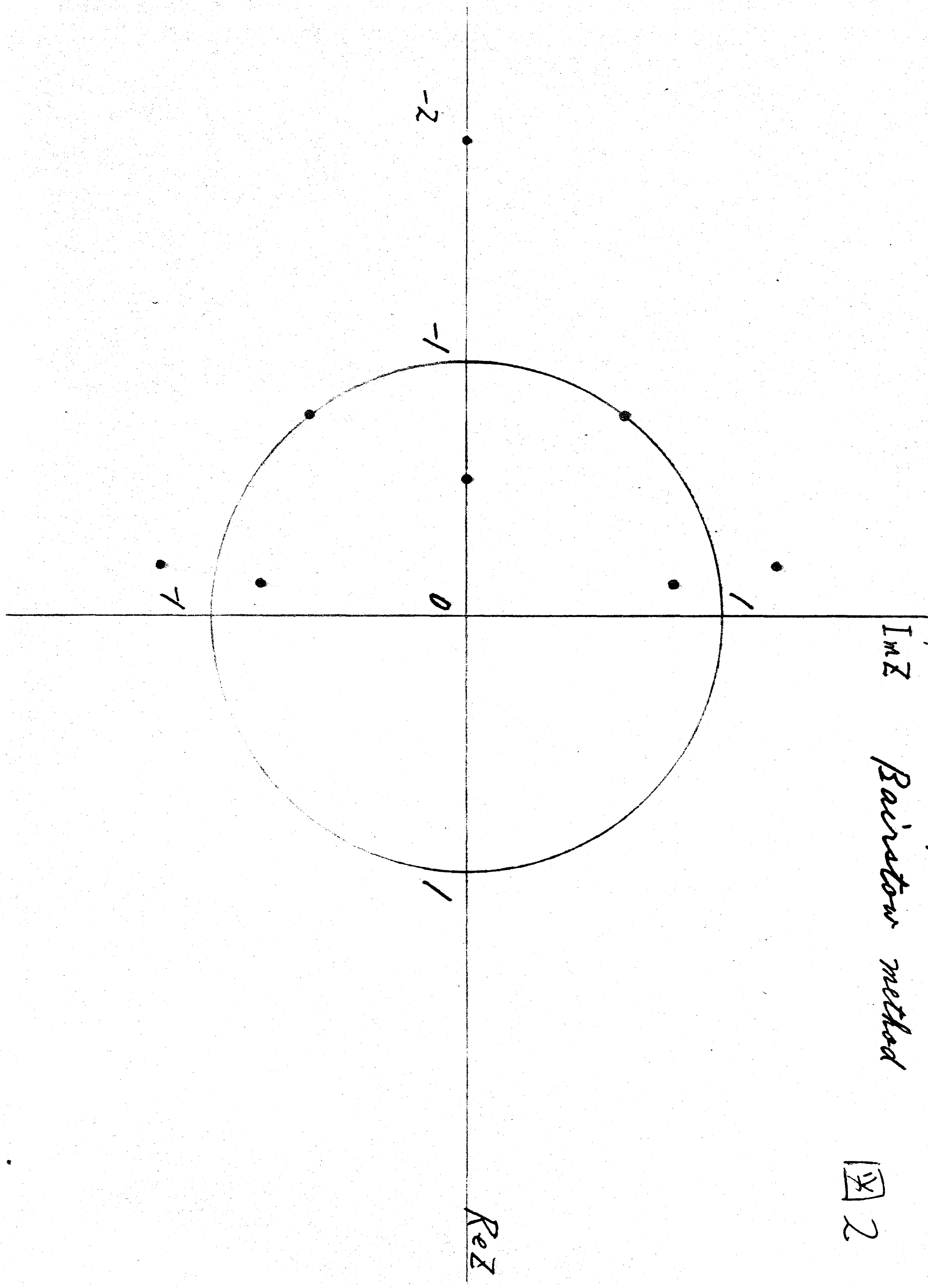
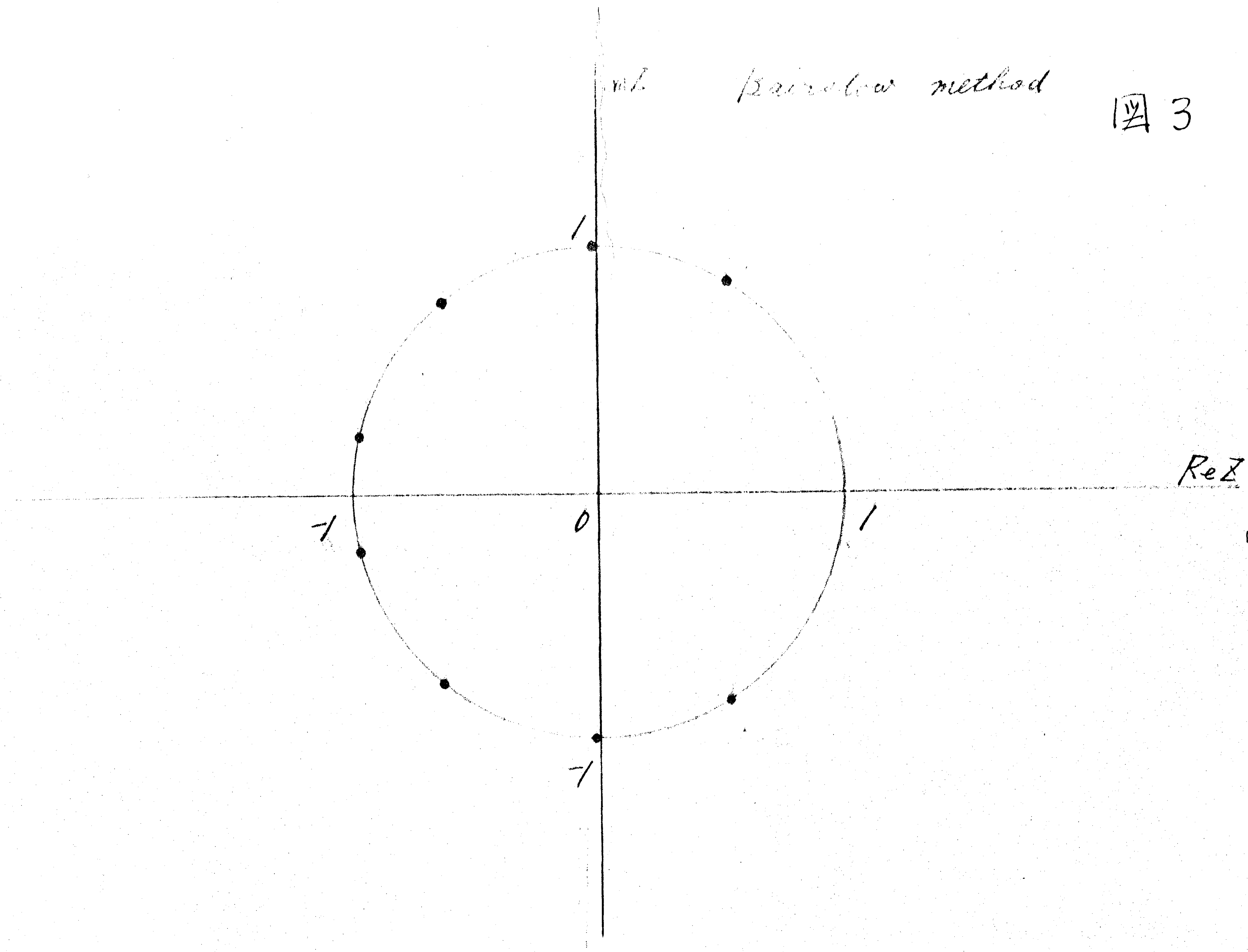


図2 Bairstow method

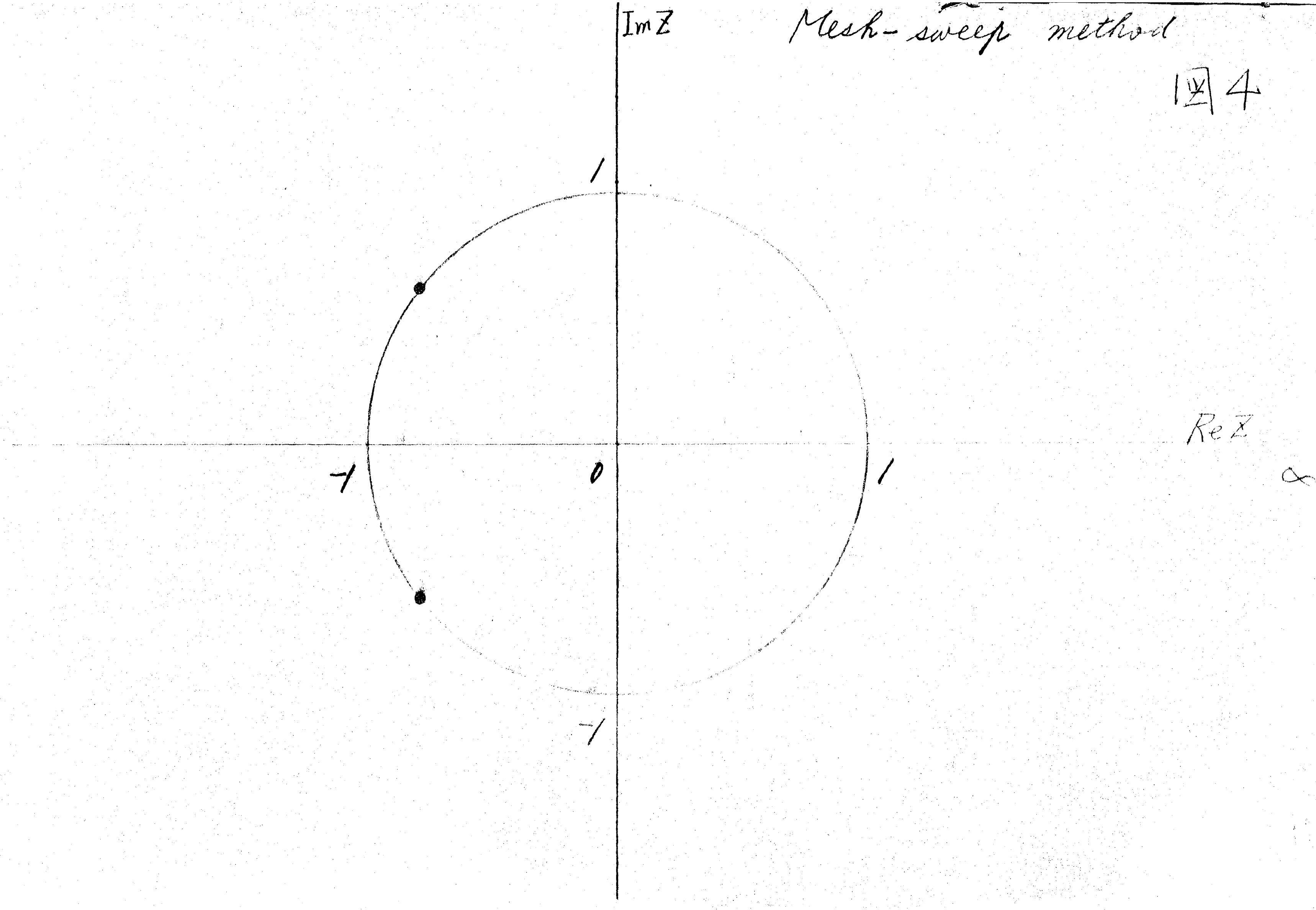


Bairstow method

図 3

Mesh-sweep method

図4



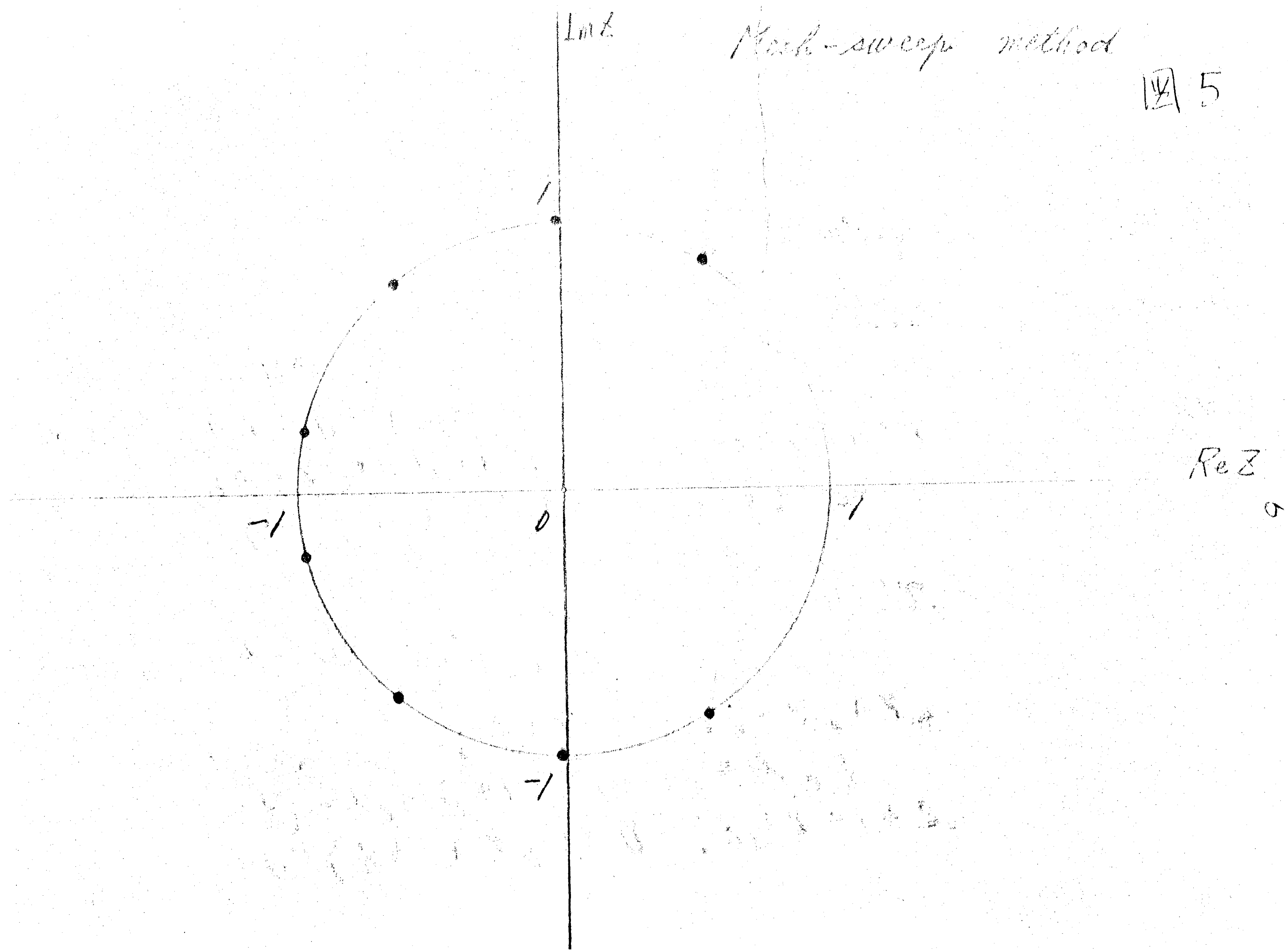


図5

式2

$$Z = a_0 + a_1(z + 1 + z^{-1}) + a_2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2})$$
$$+ a_3(z^3 + z^2 + z^1 + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$$
$$+ a_4(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})$$

$$z + 1/z = x, \quad f(x) = C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x^1 + C_0$$

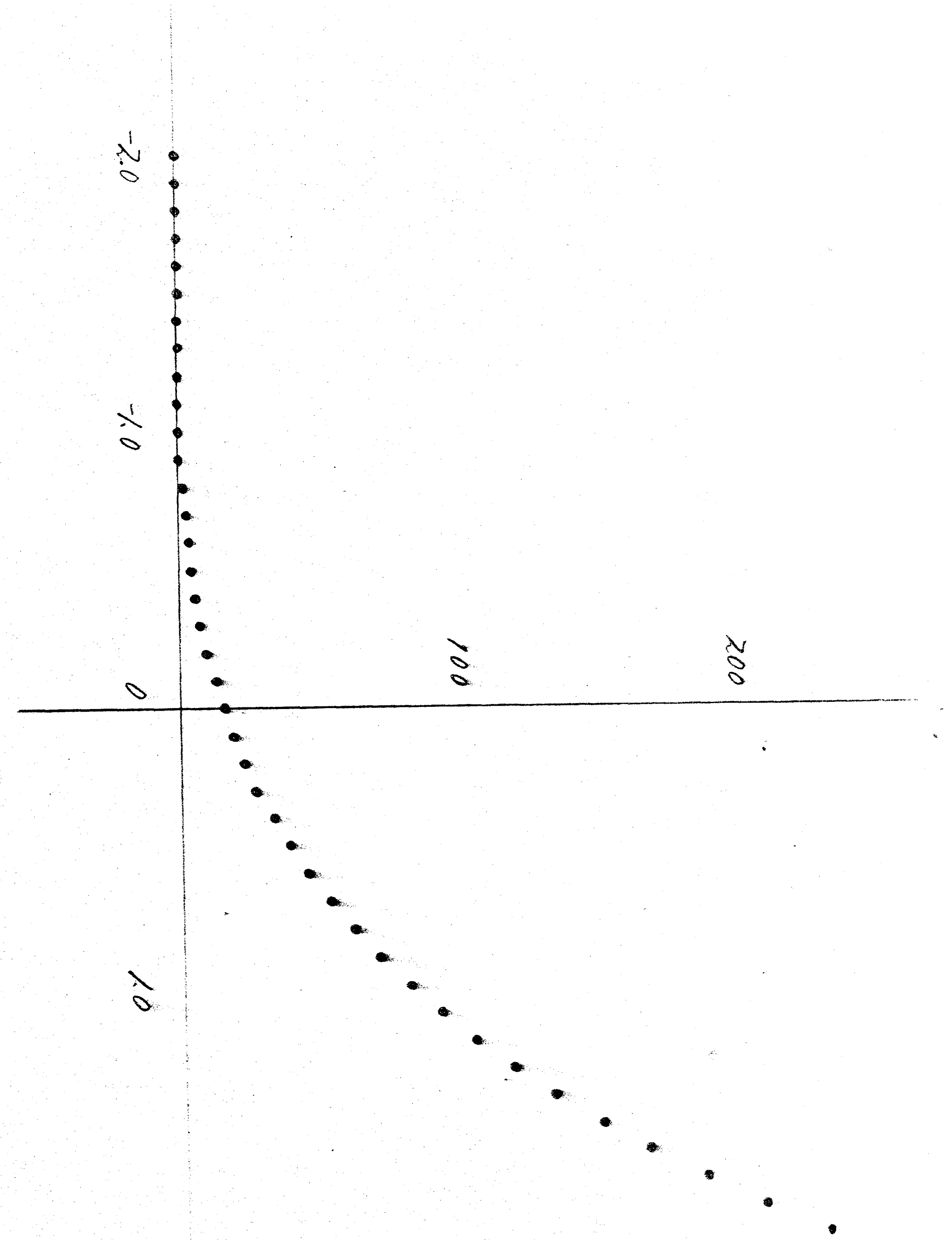
$$C_0 = a_4 - a_3 - a_2 + a_1 + a_0$$
$$C_1 = -2a_4 - 2a_3 + a_2 + a_1$$
$$C_2 = -3a_4 + a_3 + a_2$$
$$C_3 = a_4 + a_3$$
$$C_4 = a_4$$

$f(x) = 0$

$-2 < x_1, x_2, x_3, x_4 < 2$ …. unite circle

$x_i < -2$ …. negative real

x_i complex …. not unite circle, not negative real


-2.0
-1.0
0
1.0
2.0
100
200
x

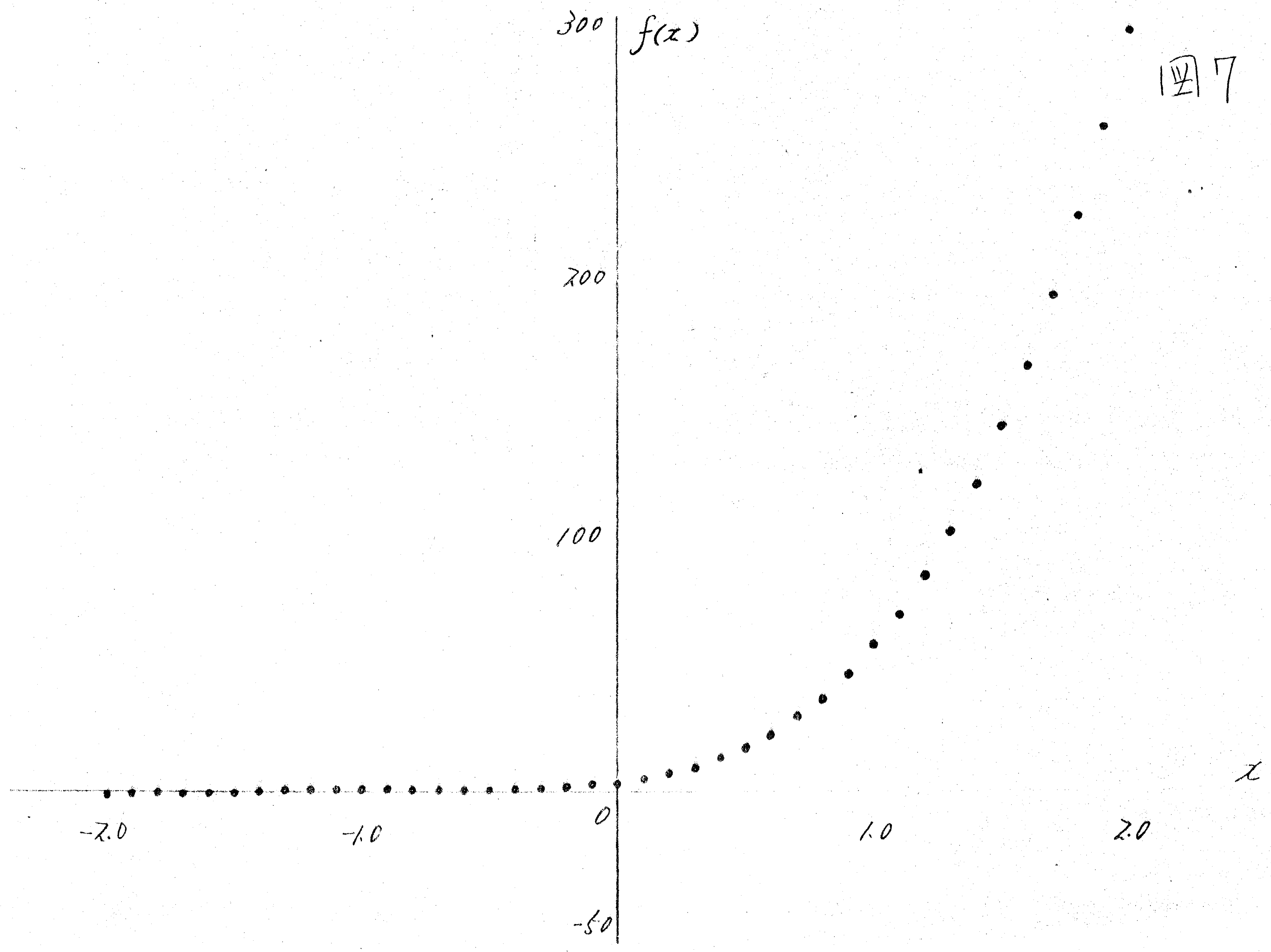


図7

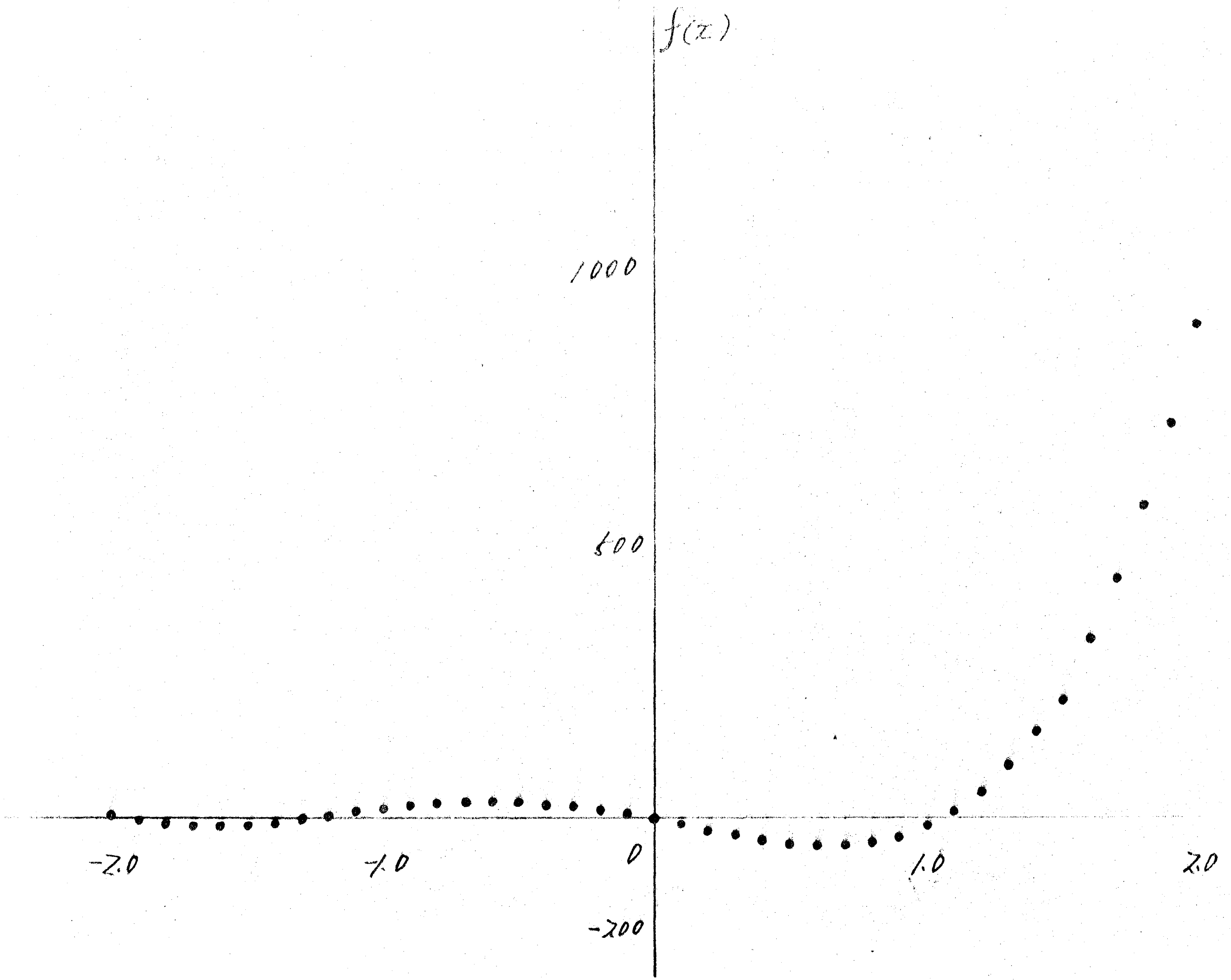
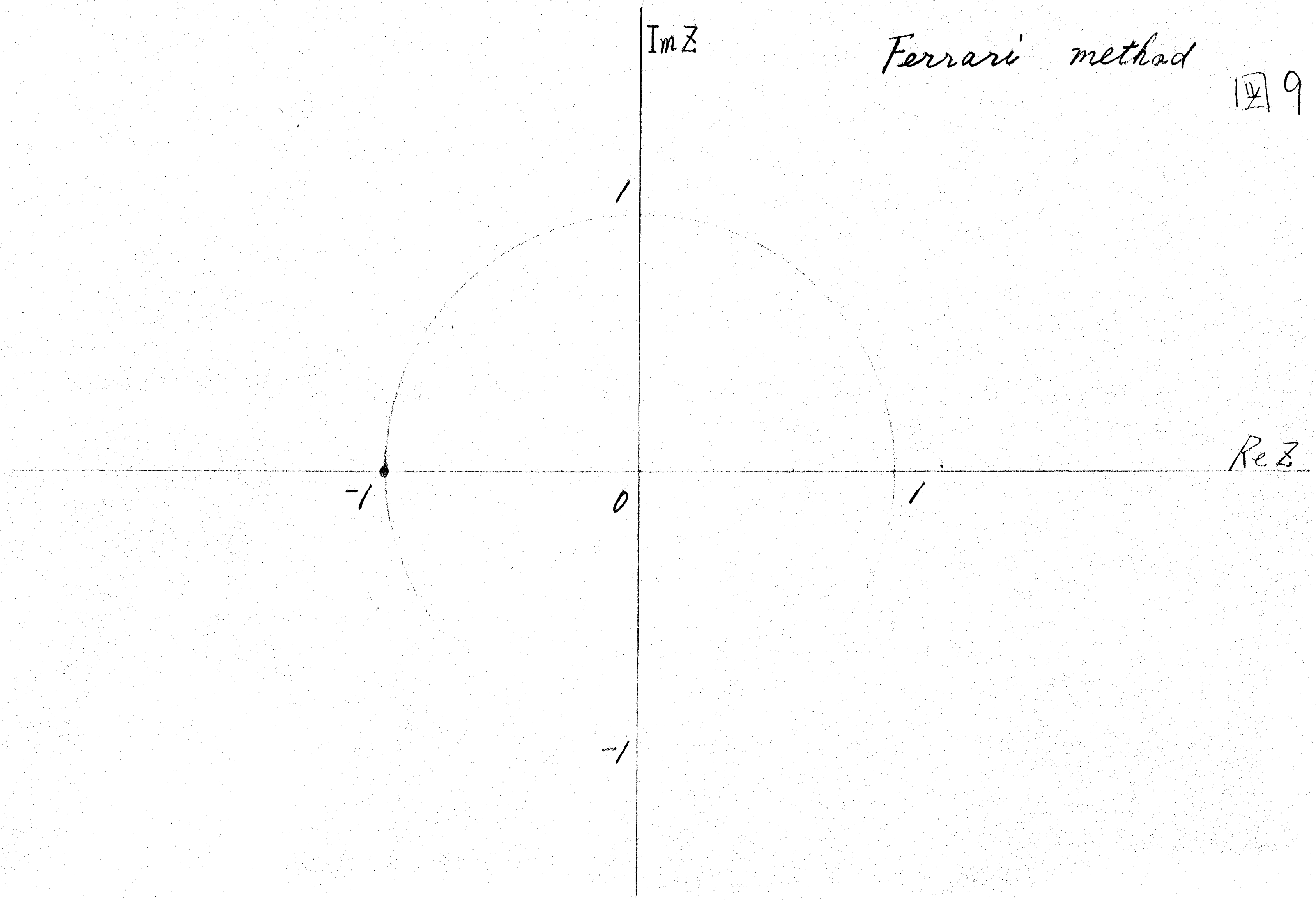


図 8

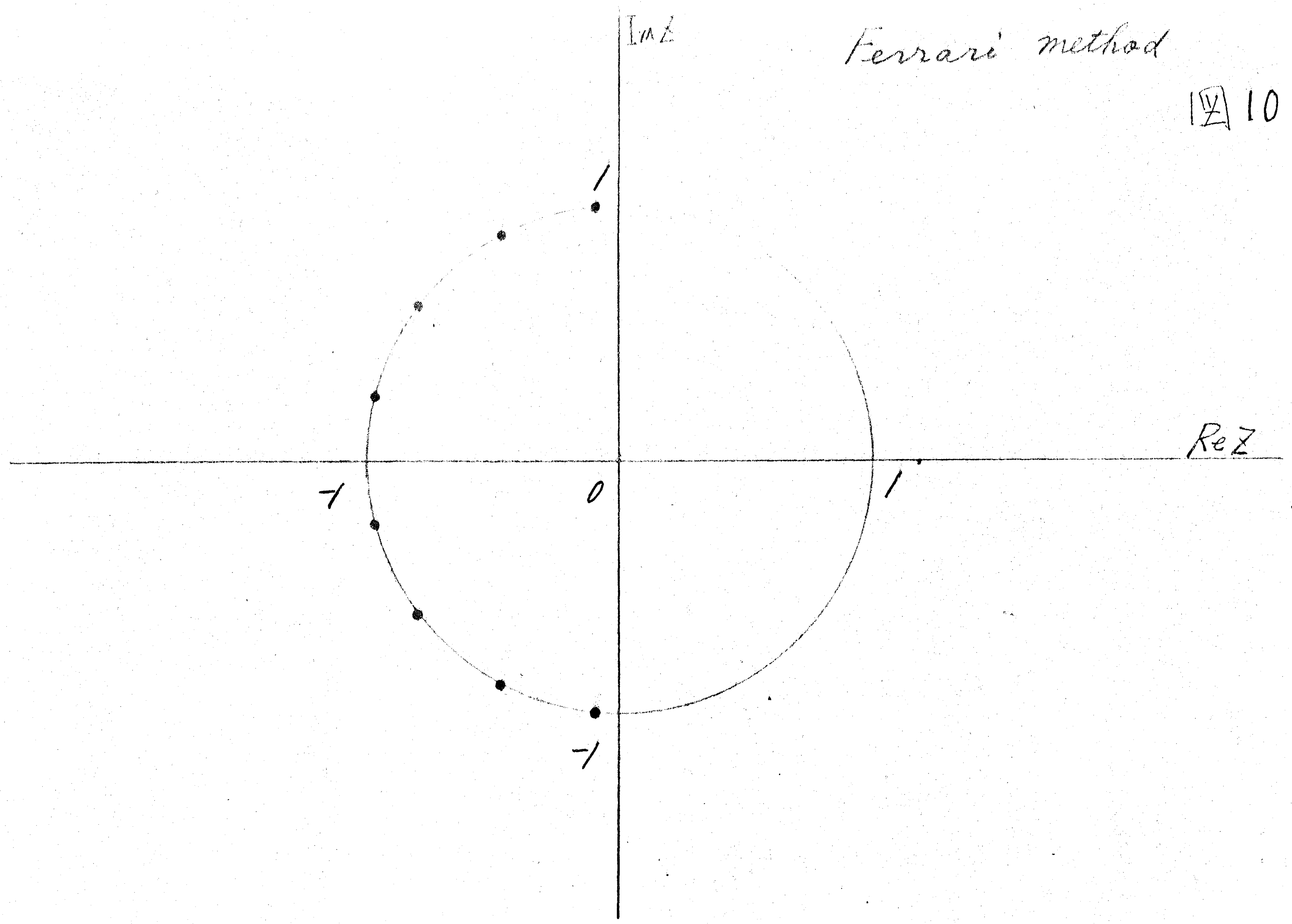
Ferrari method

図9



Ferrari method

図 10



Ferrari method

図 11