数理解析研究所講究録
73巻 1969年 75-86

階乗級数とその応用

京大 数研 河野實彦

1. 微分方程式系

階乗級数の応用例として，常微分方程式や差分方程式の解の，階乗級数による展開がある。特に，差分方程式においては，常微分方程式における巾級数と同じ役割をし，解の行動を調べるのに用いられてきた。常微分方程式においては，解の行動を調べるのには，巾級数が多く用いられ，例えば，不確定特異点近傍の解の行動の研究においては，発散巾級数による解の漸近的表示の研究が，主であった。それは，不確定特異点近傍においては，一般に，解の存在は言えても，確定特異点近傍の解と同じように，収束する巾級数によって，解を展開する事が出来ないからである。ところが，階乗級数を用いれば，不確定特異点近傍の解も，展開表示する事が出来る。その事を簡単な微分方程式系を用いて，説明する。

次の，原点に確定特異点，無限大に，rank 1 の不確定特異点を持つ，微分方程式系を考える。

$$(1) \qquad \frac{dX}{dt} = \left(B + \frac{A}{t} \right) X$$

ここで，A，B は $n \times n$-行列で，B は特に

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

で，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ は，0 でない相異なる数と考えておこう。

この微分方程式系は，不確定特異点近傍で，次の形式解を持っている。

$$(2) \qquad X^k(t) \cong e^{\lambda_k t}\, t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, t^{-s}$$

いま，$X^k(t) = e^{\lambda_k t}\, Y^k(t)$ とおくと，微分方程式系 (1) は

$$(3) \qquad \frac{dY^k}{dt} = \left(B - \lambda_k I + \frac{A}{t} \right) Y^k$$

となり，$Y^k(t) = t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, t^{-s}$ を代入してみると，係数 $H^k(s)$ は

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_{kk} - s - A)\, H^k(s) = (B - \lambda_k)\, H^k(s+1) \\ \\ (B - \lambda_k)\, H^k(0) = 0 \end{cases}$$

を満たす。

更に，$Y^k(t) = t^{-\sigma} Z^k(t)$ の変換により，微分方程式系(3)は

$$(5) \qquad \frac{dZ^k}{dt} = \left(B - \lambda_k I + \frac{A + \sigma I}{t} \right) Z^k$$

と変換されるので，Aの対角要素 a_{kk} の実部は任意の大きさの値と考えても良い。

2. Laplace 変換

さて，微分方程式系(3)を満たす様な，Laplace 積分

$$(6) \qquad Y^k(t) = \int_0^\infty W^k(x) e^{-tx} dx$$

を考える。積分路として，$x=0$ から，無限大にのびる直線 $\arg x = \omega$ を選び，この上に $\lambda_j - \lambda_k$ $(j \neq k)$ の点を含まないようにする。

この直線に沿って，x が無限大に行くとき，

$$(7) \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-tx} \int_0^x W^k(x)\, dx = 0$$

なる仮定の下に，Laplace 積分(6)を，微分方程式系(3)に代入する事によって，$W^k(x)$ は下の積分方程式を満たさなければならない。

$$(8) \qquad (x + B - \lambda_k)\, \overline{W}^k(x) = -A \int_0^x \overline{W}^k(x)\, dx$$

この両辺を微分すれば

$$(9) \qquad (x + B - \lambda_k)\, \frac{d\overline{W}^k}{dx} = (-A - I)\, \overline{W}^k$$

を得る。

ところで、Laplace 積分 $Y^k(t)$ として、漸近級数

$$(10) \qquad Y^k(t) \cong \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, t^{-s+a_{kk}}$$

を持つものを考えれば、$\overline{W}^k(x)$ としては、次の Borel 函数をとれば良い。

$$(11) \qquad \overline{W}^k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-a_{kk})\, H^k(s)}{\Gamma(s - a_{kk})}\, x^{s-a_{kk}-1}$$

実際、この函数は微分方程式系(9)を形式的に満足している。

$$x\, \frac{d\overline{W}^k}{dx} + (B - \lambda_k)\, \frac{d\overline{W}^k}{dx} + (A + I)\, \overline{W}^k$$

$$= \Gamma(-a_{kk}) \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s - a_{kk})}\, x^{s-a_{kk}-1} + (B-\lambda_k) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s-a_{kk}-1)}\, x^{s-a_{kk}-1} \right.$$

$$\left. + (A + I) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s - a_{kk})}\, x^{s-a_{kk}-1} \right\}$$

$$= \Gamma(-a_{kk}) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(s - a_{kk} + A) H^k(s) + (B - \lambda_k) H^k(s+1)}{\Gamma(s - a_{kk})} \right] x^{s - a_{kk} - 1}$$

$$= 0$$

ところが，形式解の係数 $H^k(s)$ を差分式(4)を使って評価すれば，

(12) $$\| H^k(s) \| \leqq \frac{\| H^k(0) \|}{|\lambda - \lambda_k|^s} \frac{\Gamma(s + \|A\| + |a_{kk}|)}{\Gamma(\|A\| + |a_{kk}|)}$$

となるので，$W^k(x)$ の右辺は，$|x| \leqq |\lambda - \lambda_k| = \min_{j \neq k} |\lambda_j - \lambda_k| > 0$ で収束する事がわかる。よって，$W^k(x)$ は，微分方程式系(9)の，原点（確定特異点）近傍の一つの特殊解である。

さて，ここで $W^k(x)$ が exponential type 函数である事を示そう。即ち，G を充分大きい正の数とし，$k\,(>1)$ を ω に関係して決まる正の数とすれば

(13) $$| W^k(x) | < G e^{k|x|}$$

が成立つ。実際，積分方程式(8)を componentwise に書いて

(14) $$(x + \lambda_i - \lambda_k) w_i^k(x) = - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_0^x w_j^k(x)\, dx$$

ある扇形領域 S の，$|x| \leqq R$ なる部分では，$|w_i^k(x)| < C e^{h|x|}$ が成立つが，$|x| > R$ で，ある ω' に対して上の不等式が成立ないと仮定する。その時の $|x|$ の下界を R' とすると，$i = i'$，$\omega = \omega'$ において $|w_{i'}^k(x)| = C e^{h|x|}$ となる。

一方，$|x| \leqq R'$ においては $|w_j^k(x)| \leqq C e^{h|x|}$ であるので，上式 (14) より，$|x| = R'$，$i = i'$，$\omega = \omega'$ に対して

$$|x + \lambda_i - \lambda_k|\,|w_{i'}^k(x)| \leqq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \int_0^{|x|} |w_j^k(x)|\, d|x|$$

$$\leqq \|A\| \int_0^{|x|} C e^{h|x|}\, d|x|$$

$$\leqq \frac{\|A\|}{h} C e^{h|x|}$$

$$|w_{i'}^k(x)| = C e^{h|x|} \leqq \frac{\|A\|\, C e^{h|x|}}{|x + \lambda_i - \lambda_k|\, h}$$

$$1 \leqq \frac{\|A\|}{|x + \lambda_i - \lambda_k|\, h}$$

最後の式の右辺は $x = \infty$ のとき 0 に収束し，R を充分大きい値とすれば 1 より小さくなり，矛盾する。よって，$w_{i'}^k(x)$，即ち $W^k(x)$ は exponential type 函数である事がわかった。この事より，次の定理が成立つ。

定理　Laplace 積分 (6) は 半平面 $\mathrm{Re}(xe^{i\omega}) > h$ において，微分方程式系 (3) の解を表わす。

3．階乗級数展開

Laplace 積分 (6) の階乗級数展開について説明しよう。

そのために，先づ，変数変換 $x = -\frac{1}{\kappa}\log z$，$z = e^{-\kappa x}$ を行なう。ここで，$\kappa = \gamma e^{-i\omega}$ で，絶対値 γ は適当な大きさに選ぶ。即ち，z－平面上の円 $|z-1| = 1$ の内部は x－平面上のある領域 G に移され，γ を大きくとれば，領域 G は半直線 $\arg x = \omega$ の近くの狭い扇形領域 S の中に入るように出来て，内部と境界上に，特異点 $\lambda_j - \lambda_k$ $(j \neq k)$ を含まない様にする事が出来る。

その時，

$$(15) \qquad V^k(z) = W^k\left(-\frac{1}{\kappa}\log z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)(1-z)^{m-a_{kk}-1}$$

は，$|z-1| < 1$ で収束し，円周上での特異性は $x = \infty$ に対応する $z = 0$ のみである。ところで，

$$|x| = \frac{1}{\gamma}|\log z| < -\frac{1}{\gamma}\log|z|(1+\varepsilon)$$

より，$z = 0$ における $V^k(z)$ の特異性 (Hadamard の order) は，$W^k(x)$ に対する評価式 (13) より，

(16) $$|V^k(z)| < C e^{-\frac{h}{\gamma}\log|z|(1+\varepsilon)} = C\,|z|^{-\frac{h}{\gamma}(1+\varepsilon)}$$

を得る。この事は、$V^k(z)$ の円周 $|z-1|=1$ 上での order が高々 $\frac{h}{\gamma}$ である事を示し、充分大きい m に対して

(17) $$|B^k(m)| < m^{\frac{h}{\gamma}-1+\varepsilon}$$

が成立つ。

さて、ここで、次の級数が収束する事を示そう。

$$\sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \int_0^1 \left| (1-z)^{m-a_{kk}-1} z^{\frac{t}{\lambda}-1} \right| dz$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \int_0^1 (1-z)^{-Re(a_{kk})+m-1} z^{Re(\frac{t}{\lambda})-1} dz$$

$$= \Gamma\left(Re\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right) \sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \frac{\Gamma(m-Re(a_{kk}))}{\Gamma\left(Re(\frac{t}{\lambda})+m-Re(a_{kk})\right)}$$

ところが、充分大きい m に対して

$$|B^k(m)| \left| \frac{\Gamma(m-Re(a_{kk}))}{\Gamma\left(m+Re(\frac{t}{\lambda})-Re(a_{kk})\right)} \right| < m^{\frac{h}{\gamma}-1+\varepsilon-Re(\frac{t}{\lambda})}$$

$$= m^{-\frac{1}{\gamma}(Re(te^{i\omega})-h)-1+\varepsilon}$$

となり、$Re(te^{i\omega}) > h + 2\varepsilon\gamma$、即ち、$\varepsilon$ は任意の小さい数であるから、$Re(te^{i\omega}) > h$ に対して、上の級数は収束する事

がわかった。この事実から巾級数(15)を Laplace 積分(6)に代入して項別積分する事が許される。

$$(18)\qquad Y^k(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\,(1-z)^{m-a_{kk}-1}\, z^{\frac{t}{\lambda}-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\int_0^1 (1-z)^{m-a_{kk}-1}\, z^{\frac{t}{\lambda}-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\,\frac{\Gamma(m-a_{kk})\,\Gamma(\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\frac{t}{\lambda}+m-a_{kk})}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\frac{\Gamma(\frac{t}{\lambda})\,\Gamma(-a_{kk})}{\Gamma(\frac{t}{\lambda}-a_{kk})}\sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\,\frac{(m-1-a_{kk})(m-2-a_{kk})\cdots(-a_{kk})}{(\frac{t}{\lambda}+m-1-a_{kk})\cdots(\frac{t}{\lambda}-a_{kk})}$$

この右辺は半平面 $Re(te^{i\omega}) > h$ で絶対収束する。

4．ニュートン級数展開

もう一つの級数展開と，先の階乗級数展開との関連について述べよう。いま，$s > \frac{h}{\gamma} - 1$ なる数を選んで，Laplace 積分(6)を次の形に書き直す。

$$(19)\qquad Y^k(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 v^k(z)\, z^s\, z^{\frac{t}{\lambda}-s-1}\,dz$$

$|1-z| < 1$ に対して

$$z^{\frac{t}{\lambda}-s-1} = \left(1-(1-z)\right)^{\frac{t}{\lambda}-s-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{\frac{t}{\lambda}-s-1}{n}(1-z)^n$$

が成立つから，これを上に代入して，形式的に項別積分すれば，

$$(20) \qquad Y^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C^k(n) \binom{\frac{t}{k}-s-1}{n}$$

$$(21) \qquad C^k(n) = \frac{(-1)^n}{k}\int_0^1 V^k(z)\, z^s (1-z)^n \, dz$$

を得る。ここで，項別積分の正当性と，ニュートン級数(20)の収束性の証明には，評価式(16)を使って，

$$|C^k(n)| < \frac{C}{\gamma}\int_0^1 z^{s-\frac{h}{\gamma}-\delta}(1-z)^n \, dz \qquad \left(\delta = \frac{h}{\gamma}\varepsilon\right)$$

$$= \frac{C}{\gamma}\,\frac{\Gamma(s+1-\frac{h}{\gamma}-\delta)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+2-\frac{h}{\gamma}-\delta)}$$

$$\binom{\frac{t}{k}-s-1}{n} = \frac{(\frac{t}{k}-s-1)\cdots(\frac{t}{k}-s-n)}{n!} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-\frac{t}{k}+s+1)}{\Gamma(s+1-\frac{t}{k})\,\Gamma(n+1)}$$

$(\frac{t}{k}-s-1) \neq$ non negative integer と仮定すれば

$$\left| C^k(n)\binom{\frac{t}{k}-s-1}{n}\right| < \frac{C}{\gamma}\left|\frac{\Gamma(s+1-\frac{h}{\gamma}-\delta)}{\Gamma(s+1-\frac{t}{k})}\right| n^{-Re(\frac{t}{k})+\frac{h}{\gamma}-1+\delta}$$

より，半平面 $Re(te^{i\omega}) > h$ で，ニュートン級数(20)は収束することがわかる。

同様の考え方で、関係式(21)に $V^k(z)$ の巾級数(15)を代入し、項別積分すれば、ニュートン級数の係数 $C^k(n)$ と階乗級数の係数 $B^k(m)$ の間に次の様な関係式が成立つ。

$$C^k(n) = \frac{(-1)^n}{K} \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\,(1-z)^{m-a_{kk}-1}\, z^s\,(1-z)^n\, dz$$

$$= \frac{(-1)^n}{K} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \int_0^1 z^s\,(1-z)^{m+n-a_{kk}-1}\, dz$$

$$= \frac{(-1)^n}{K} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m)\, \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+n-a_{kk})}{\Gamma(m+n+s+1-a_{kk})}$$