

Markov 過程の multiplicative functional による
変換と generator の関係

名古屋大 理 国田 寛 述
東工大 理 土谷 正明 記

§ 0 Introduction

S ; locally compact Hausdorff space.

$(X_t, \mathcal{F}_t, B_t, P_x), (X_t, \mathcal{F}_t, B_t, P'_x)$; S を state space (= E)
の standard process.

\mathcal{F}_t は $X_s, s \leq t$ を可測にする最小の σ -algebra

◦ $B_t[t, \infty)$ の上 $P_x \sim P'_x \quad \forall t, \forall x \in S$

\Rightarrow density $\frac{dP'_x}{dP_x}$ ($B_t[t, \infty)$) の version と $(Z$

$M_t(\omega) \geq 0$; multiplicative functional (M.F.) Z
と $M_t = Z_t$ が出来る。

$$(M_t(\omega) \circ_t M_s(\omega) = M_{t+s}(\omega))$$

◦ 逆に $M_t(\omega) \geq 0$, right continuous

$$M_t(\omega) \circ_t M_s(\omega) = M_{t+s}(\omega)$$

$$E_x(M_t) = 1$$

$$\Rightarrow P'_x(B) \equiv P_x^M(B) \equiv E_x(M_t; B) \quad B \in B_t$$

とあくく $P_x^M < P_x$.

② $P_x > P_x'$ とする条件を解析的な量 (generator) で特徴づけたい。

例1. (X_t, P_x) ; R^d -Brown 運動とする。

$(X_t, P_x') < (X_t, P_x)$ の十分条件は、丸山, 本尾, Dynkin により得られた。

(X_t, P_x') の generator が, (f^i の正則条件を仮定して)

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \Delta + \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{Drift の変換})$$

であればよい。

必要条件を Hille-Yosida あるいは Dynkin generator で特徴付けることは、おそらく不可能であるが、generator の定義域を拡張すれば、上記の表現が必要十分であることが、Wentzell の結果により知られている。

例2. (X_t, P_x) ; Markov chain $\mathcal{G} = \delta_x (\pi(x, y) - \delta(x, y))$

(X_t, P_x') ; Markov chain $\mathcal{G}' = \delta_x' (\pi'(x, y) - \delta(x, y))$

$$"(X_t, P_x) \preceq (X_t, P_x') \iff \delta_x \pi(x, y) = 0 \iff \delta_x' \pi'(x, y) = 0"$$

chain の場合は、M.F の変換は Lévy measure の変換であり、その特殊な場合として、time change を含んでいる。

例 3,
$$\mathcal{G} = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta$$

このときは、 t 方向の drift の変換は、M.F. による変換に含まれない。BPS,

$$\mathcal{G}' = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta} + \left(\sum f' \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{f' \frac{\partial}{\partial t}} \right)$$

とはならない。

=階の elliptic の項は t 方向に degenerate .

これらの例から

(a) diffusion の場合は、M.F. の変換は、いわゆる drift の変換であるが、drift の変換をすべて含むのではない。

M.F. の変換で移れる class は generator の =階の項の ellipticity に関連する =とが予想される。

(b) 一般の Markov 過程 (必ずしも diffusion でないとき) では、M.F. による変換は、ある種の drift の変換と、Levy-measure の変換の結合されたものである =とが予想される。

しかし、上記の予想を、Hille-Yosida の意味の generator の言葉で実現する =とは出来ないのが、generator の定義域を拡張し、その上で議論したい。尚、diffusion の境界条件が、M.F. の変換で、どう変るかについても議論したい。

例. Generator の拡張.

$(X_t, \zeta, \mathbb{F}_t, P_x)$; standard process とする.

仮定:

(i) Meyer の (L)

(ii) ζ は accessible, $\mathbb{Q}P\zeta$.

$\exists T_m$; quasi-hitting time (Q.H.T)

$T_m \uparrow \zeta, \text{ and } T_m < \zeta.$

• $\mathcal{H}_{loc} \ni X_t \xrightarrow{\text{def}} X_t$; additive functional (A.F.)

$\exists T_m$; Q.H.T. $T_m \uparrow \zeta$;

$X_{t \wedge T_m}$; 平均 0, 2乗可積分.

• $\mathcal{H}_{loc} \ni X_t, Y_t \Rightarrow \exists \langle X, Y \rangle_t$; continuous additive functional (C.A.F.);

bounded variation

$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{local martingale.}$

• A_t ; C.A.F. ; non-negative

$\Rightarrow \exists \nu$; $S \pm$ の measure such that

$$\int_0^t I_E(x_s) dA_s = 0 \quad \forall t, \text{ a.e. } P_x \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \nu(E) = 0 \quad \text{''} \quad (I_E(x): E \text{ の定義函数})$$

ν を A_t の canonical measure とする;

Def A_t ; non-negative C.A.F. is canonical

\Leftrightarrow (i) $A_t = t\lambda + B_t$ (B_t is $t\lambda = 1$ and singular t and non-negative C.A.F.)

(ii) $\langle X \rangle_t \equiv \langle X, X \rangle_t \leq A_t$ for $\forall t \in \mathcal{D}_{loc}$.

② canonical A_t is exist.

Def (A_t, ν) ; canonical system is

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \left\{ u \in B(S) \mid \exists f ; X_t^u \equiv u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t f(X_s) dA_s \in \mathcal{D}_{loc} \right\}$$

f is locally A -integrable

f is locally A -integrable $\Leftrightarrow \exists T_m$ a.H.T. $T_m \uparrow \infty$
 $\int_0^{T_m} f(X_s) dA_s$; integrable

$B(S)$; S 上の bounded Borel function の全体.

$u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A) \Leftrightarrow \exists f$,

$$\mathcal{G}_A u = f$$

is a.c.

f is ν -measure 0 を除いて, unique 1 = 定まる.

\mathcal{G} , $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ is Ito's generator is.

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \equiv \mathcal{R}(\mathcal{G}_\alpha f ; f \in B(S))$$

$$\mathcal{G} u \equiv (\alpha - \mathcal{G}_\alpha^{-1}) u \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

Prop 1

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{ u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A) ; \mathcal{G}_A u \text{ is bounded, } \mathcal{G}_A u = 0, \text{ a.e. } \mu \}$$

$\mathcal{M} \subset \mu$; B_t の canonical measure

$\{\eta_i\}$; BCS) の可算集合で, S の点を分離するもの.

$$C^2(\{\eta_i\}) \ni u \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists U \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad (n=1,2,\dots)$$

$$u(x) = U(\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$$

$$D_{\eta_i} u(x) \equiv \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}(\eta(x)) & i=1,2,\dots,n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Theorem

$\{\eta_i\}, \{\eta_i^2\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ と仮定する.

$\Rightarrow C^2(\{\eta_i\}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ かつ, $u \in C^2(\{\eta_i\}) \Rightarrow \mathcal{G}_A u$,

$$\mathcal{G}_A u(x) = \frac{1}{2} \sum a^{ij}(x) D_{\eta_i} D_{\eta_j} u(x) + \sum b^i D_{\eta_i} u(x)$$

$$+ \int [u(y) - u(x) - \sum D_{\eta_i} u(x) (\eta_i(y) - \eta_i(x))] \nu(x, dy)$$

a^{ij} ; non-negative definite symmetric

locally A -integrable measurable functions

b^i ; locally A -integrable functions

$\nu(x, dy)$; kernel.

$(\nu(x, dy), A)$; Levy system とする.

$\mathcal{G}_A(C^2(\{\eta_i\}))$ かつ A_t は局所可積分な函数族の中で dense である. 上の a^{ij}, b^i, ν は process を一意に定める.

Remark

D : N -dimensional C^∞ -manifold

∂D : $N-1$ -dimensional hyper surface C^3 -class

$$A = \sum a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

a^{ij} : positive definite symmetric C^2 -class

b^i : C^1 -class.

= 9 4 3 .

Def. $T_t : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$: 強連続

T_t の infinitesimal operator が A の closed extension
 となることを, T_t に 対応する Markov process を A の diffusion
 とする。

T_t の Hille-Yosida の generator の domain を $\tilde{D}(A)$
 とおく。

Assumption

I $(\alpha - A)u = f$ が dense $T_\alpha f$ について 2 解をもつ,

II $\forall x_0 \in \bar{D}$, $\exists (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$: local coordinate

η_i は continuous excessive function の
 差となる。

III $P_t(x, \partial D) = 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in \bar{D}$ 但し, P_t は推移確率。

(上野-佐藤の場合は上の条件を満たしている。)

このとき,

$A_t = t\Lambda + B_t$ なる canonical A.F. は、次の形に与え

$$3. \quad B_t = \int I_{\partial D} dA_s$$

α_{ij} , β_i の境界への制限を d_{ij} , β_i と書き、 $\mathcal{O}_A u$ の境界への制限を $L u$ とかくと、

$$L u = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int [u(y) - u(x) - \sum \frac{\partial u}{\partial \eta_i} (\eta_i(y) - \eta_i(x))] \nu(x, y)$$

(境界 ∂D の local coordinate (η_1, \dots, η_N) を $\eta_N(x) = 0 \quad x \in \partial D$

とする様にとすれば $\alpha^{iN}(x) = 0 \quad x \in \partial D$ となる = 与えられる。)

Prop. 4 により、

$$\widehat{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = \{u \in C^2; L u = 0, \text{ a.e. } \mu\}$$

即ち、境界条件も $\mathcal{O}_A u$ で表現出来る。

§2 Multiplicative functional (= よろ変換

M_t : multiplicative functional (M.F.).

$$(i) \quad M_t > 0 \quad t < \zeta \\ = 0 \quad t \geq \zeta$$

(ii) local martingale

$$0 P_x^M(B) = E_x(M_t; B)$$

$\Rightarrow (X_t, \zeta, \mathbb{F}_t^M, P_x^M)$ is standard process ϵ to ζ .

Theorem

(A_t, ν) : canonical system of (X_t, P_x)

\Rightarrow (I) (A_t, ν) : (X_t, P_x^M) の canonical system, $\forall x$.

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \mathcal{D}(\mathcal{G}_A^M)$$

\mathbb{R}^n , $u \in C^2(\{x_i\})$ とする ϵ ,

$$\mathcal{G}_A^M u(x) = \mathcal{G}_A u(x) + B u(x)$$

$= = 2''$.

$$B u(x) = \sum f^i D_{\eta_i} u(x) + \int (u(y) - u(x)) (e^{f(x,y)} - 1) \nu(x, dy) \quad \text{--- } \textcircled{*}$$

但し、 $f^i, f(x, y)$ は次の条件を満す。

(a) $f^i \in \mathcal{H}^1$, \exists locally A -integrable function $h \geq 0$;

$$|\sum f^i g_i| \leq h^{\frac{1}{2}} (\sum a^{ij} g_i g_j)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \forall \{g_i\}$$

(b) $f(x, y) ; \int v(x, dy) | (e^{f(x, y)} - 1) | ; \text{locally integrable}$

(II) 逆に \mathcal{G}' が $\mathcal{D}(\mathcal{G}') \equiv \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ から V 局所可積分な函数族への線形作用素で、かつ

$\mathcal{G}' - \mathcal{G}_A$ の $C^2(\mathcal{M}_t)$ への制限が $(*)$ に一致するならば

$(\mathcal{G}', \mathcal{D}(\mathcal{G}')) = (\mathcal{G}'_A, \mathcal{D}(\mathcal{G}'_A))$ とおき (x_t, P_x) の

M_t -Process が存在する。

Remark

① (a) は F の (a') と equivalent

(a') $\exists \{f_i\} ; \sum a^{ij} f_i f_j ; \text{locally integrable}$

$$f^i = \sum_j a^{ij} f_j \text{ かつ } \exists$$

② (a') \Rightarrow (a)

$$\begin{aligned} |\sum f^i g_i| &\leq |\sum_j (\sum_i a^{ij} f_i) g_j| = |\sum a^{ij} f_i g_j| \\ &\leq \underbrace{(\sum a^{ij} f_i f_j)}_{\substack{\parallel \\ \text{L}}}^{1/2} (\sum a^{ij} g_i g_j)^{1/2} \end{aligned}$$

② Diffusion case (前出)

$(a^{ij}) ; \text{strictly positive definite かつ}$

(a) と (a'') は同値

$(a'') \sum a_{ij} f^i f^j$ が locally integrable

但し, (a_{ij}) は (a^{ij}) の inverse matrix.

③ Diffusion の場合に境界条件は, いくつかの

変換した process の境界条件;

$$\underline{g_A^M u = 0 \text{ on } \partial D \quad \text{a.e. } \mu}$$

$g_A^M u$ の ∂D 上への制限を $L^M u$ とおけば,

$$L^M u = Lu + B'u$$

但し,

$$B'u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f^{i'} \frac{\partial u}{\partial \eta_i}(x) + \int (u(y) - u(x)) (e^{f(x,y)} - 1) \nu(x, dy)$$

であり, $\{f^{i'}\}$ は Theorem の (I) (a) の条件 (a^i) を d^i に
おきかえて) をみたし, f は (b) の条件をみたす.

従って, 特に, 境界条件が n -階の微分作用素を含まないとき,
(例えは 反射壁) は境界条件は変わらない.

定理の証明;

(I) の証明.

$\log M_t$ の jump が有界と仮定しておく.

$$M_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right\} \exp \left\{ Q_t(f) - \int_0^t \nu \cdot (e^f - 1 - f) dA_s \right\}$$

とあらわされる.

従って, 確率積分の公式から,

$$M_t - 1 = \int_0^t M_s dX_s + \int_0^t M_s dQ_s (e^{\int_0^t -1}) \equiv \int_0^t M_s dZ_s$$

$$Z_t = X_t + Q_t (e^{\int_0^t -1})$$

Bu ; $\langle X^u, Z \rangle$ の A_t に関する density である。

即ち、 $\int B u(x_s) dA_s = \langle X^u, Z \rangle$

今、簡単のため、diffusion の場合を示す。

即ち、 $M_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right\}$

$$Z_t = X_t \quad \text{である。}$$

$$\begin{aligned} \langle X^u, Y \rangle &= \langle X^u, \int M_s dX_s \rangle = \int M_s d \langle X^u, X \rangle_s \\ &= \int M_s B u dA_s \end{aligned}$$

但し、 $Y_t = M_t - 1 = \int_0^t M_s dX_s$

$X_t^u Y_t = \text{local martingale} - \langle X^u, Y \rangle$ である。

$$\begin{aligned} \downarrow \\ X_t^u (M_t - 1) &= (u(x_t) - u(x_0) - \int_0^t \sigma_{\partial A}^u dA_s) (M_t - 1) \\ &= M_t (u(x_t) - u(x_0)) - M_t \int_0^t \sigma_{\partial A}^u dA_s - X_t^u \end{aligned}$$

$$M_t (u(x_{t+1}) - u(x_0)) - M_t \int_0^t \sigma_A u dA_s - \int_0^t M_s B u dA_s$$

= local martingale.

例 2. $T_n \uparrow \infty$ に対して

$$\begin{aligned} E_x [M_{t \wedge T_n} (u(x_{t \wedge T_n}) - u(x_0))] - E_x \left(M_{t \wedge T_n} \int_0^{t \wedge T_n} \sigma_A u dA_s \right) \\ - E_x \left(\int_0^{t \wedge T_n} M_s B u dA_s \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore E_x^M (u(x_{t \wedge T_n})) - u(x) - E_x^M \left(\int_0^{t \wedge T_n} \sigma_A u dA_s \right) - E_x^M \left(\int_0^{t \wedge T_n} B u dA_s \right) = 0$$

例 2. $u(x_{t+1}) - u(x_0) - \int_0^t (\sigma_A + B) u dA_s$

は (X_t, P_x^M) の local martingale である。

$$\therefore \mathcal{D}(\sigma_A) \subset \mathcal{D}(\sigma_A^M).$$

又 $M_t > 0$ ($t < \zeta$) より, 2つの process は互に絶対連続

である, 逆の変換をすれば,

$$\mathcal{D}(\sigma_A) = \mathcal{D}(\sigma_A^M).$$

$$X^u = \sum_{i=1}^m \int \frac{\partial u}{\partial \eta_i} dX^{\eta_i}$$

例 4. 3. から,

$$\langle X^u, Z \rangle = \sum_{i=1}^m \int \frac{\partial u}{\partial \eta_i} d \langle X^{\eta_i}, Z \rangle_s = \int \left(\sum_{i=1}^m f^i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \right) dA_s$$

$$\text{但し, } \langle X^{\eta_i}, Z \rangle_t = \int_0^t f^i dA_s, \quad Bu \equiv \sum_{i=1}^m f^i \frac{\partial u}{\partial \eta_i}$$

= により, \mathcal{G}_A^M の表現が得られる。

(II) の証明

$\mathcal{G}_A + B$

$$Bu = \frac{d\langle X^u, Z \rangle}{dA}$$

と して Z (Z : local martingale, A.F.) の存在を証明
 されたい。

$$M_t = \exp \left\{ Z_t - \frac{1}{2} \langle Z \rangle_t \right\}$$

で 変換が成り立つものを知得らる。

そのためには、一般に、A.F. の場の Riesz の定理；

Theorem

$F: \mathcal{M}_{loc} \longrightarrow (\text{locally } A_t\text{-integrable})$

\downarrow
 X, Y

$$F(X+Y) = F(X) + F(Y)$$

$$F\left(\int f dX\right) = f \cdot F(X)$$

locally A_t -integrable と $t \geq 0$ として。

$$F(x) \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\langle x \rangle}{dA} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathcal{H}_{loc}$$

$$\Rightarrow \exists z \in \mathcal{H}_{loc}; \quad F(x) = \frac{d\langle x, z \rangle}{dA}$$

(証明略)

をばよ。

今の場合 $F(x) \equiv Bu(\cdot)$

とすれば, F は \mathcal{H}_{loc} 上へ, 一意に拡張され, Rieszの定理の条件を満たす = とか容易に確かめられる。