数理解析研究所講究録
74巻 1969年 16-26

Strorohod に対する Remark
[harmonic coordinate をとり取す事に関して]

小林道正

1 Strorohod の研究において，rank 1 の process は，drift の変換を通して，harmonic coordinate をとりだすことができて，それと，rank 0 の process とて表わされることが示されている。しかしながら，これに対して Motoo が次のような反例を示した。即ち，負の方向では吸収壁 Brown 運動をし，正の方では反射壁 Brown 運動をするような Markov 過程である。
この process は rank 1 であるが，原点において，harmonic coordinate が，drift の変換で，とりだせないことが示された。

そこで，このような特異な点を characterize する事が問題になる。この場合に，ある関数族の中のすべての関数に対して drift の変換で harmonic にできない点として，特異な点を定めることが考えられるが，どのように関数族を定めれば，有意義であるかが，まだはっきりしないため，問題は解決されていない。

ここでは，あるクラスの関数を一つ固定した時に，それを drift の変換で harmonic にできる点とできない点を区別し，それらの点の性質を考える。

2 $\mathfrak{E} = \{ u(\cdot) ;\ u_1 - u_2 = u \quad u_k$ は class(D) の regular excessive function $\}$

とおく。 u_k に対して harmonic function $u_{k,1}$ と potential $u_{k,2}$ が存在して. $u_k(x) = u_{k,1}(x) + u_{k,2}(x)$

さらに $u_{k,2}$ に対して. positive continuous additive functional $A_t^{[u_k]}$ で $E_x(A_\zeta^{[u_k]}) = u_{k,2}(x)$

をみたすものが存在する。

そこで. $A_t^{[u]} = A_t^{[u_1]} - A_t^{[u_2]}$ とおく。

$u(x_t(w)) - u(x_0(w)) + A_t^{[u]}$

は平均0の additive functional であることがわかりこれを $\hat{u}_t$ と記す。次に

$\mathfrak{E}_2 = \{ u(\cdot) ;\ u \in \mathfrak{E}$, $\hat{u}_t$ が2乗可積分 $\}$

とおく。 non negative additive functional $\langle \hat{u} \rangle_t$ で $E_x \langle \hat{u} \rangle_t = E_x \hat{u}_t^2$ なるものが存在する。

従って. $u \in \mathfrak{E}_2$ に対して.

$u(x_t) - u(x_0) = \hat{u}_t - A_t^{[u]}$ となっている。

ここで. 次の事を仮定する。

$A_t^{[u]}$ は $\langle \hat{u} \rangle_t$ に関して絶対連続である。即ち. 可測な関数 $a(x)$ が存在して.

$A_t^{[u]} = \int_0^t a(x_s) d\langle \hat{u} \rangle_s$ となっている。

$$B[0,t]=B_t^{[u]}=\int_0^t a(x_s)^2 d\langle \hat{u}\rangle_s \quad \text{とおく。}$$

$B_t^{[u]}$ は non-negative additive functional である。

[定義1] $$\theta=\theta^{[u]}=\sup\{t>0;\ B[0,t]<\infty\}$$

θ は Martor time であるがわかる。

Blumenthal の 0-1 law によって

$$P_x\{\theta=0\}=0 \quad \text{or} \quad 1$$

であるから次の定義ができる。

[定義2]

x が [u]-regular point とは $P_x(\theta^{[u]}=0)=0$

x が [u]-singular point とは $P_x(\theta^{[u]}=0)=1$

regular point の全体を K とし singular point の全体を K^c とする。

3

はじめに、regular point から出れば、θ までは、drift の変換で harmonic にできる事を示す。

[定理1]

$u\in\mathcal{E}_2$ とし、x を regular point とする。このとき、functional β_t と $T_n\uparrow\theta$ なる Martor time の sequence が存在し、$\beta_{t\wedge T_n}$ が M-functional になり、

$$E_x\beta_{t\wedge T_n}-\frac{1}{2}\langle\beta\rangle_{t\wedge T_n}=1 \quad \text{かつ}$$

$$E_x e^{\beta_{t\wedge T_n}-\frac{1}{2}\langle\beta\rangle_{t\wedge T_n}}u(x_{t\wedge T_n})=u(x) \quad \text{が成り立つ。}$$

証明には次の [Lemma] を用いる。

[Lemma]

β_t, γ_t を bounded M-functional とし、さらに $\langle\beta\rangle_*$ が bounded とする。このとき

$$E_x\, \beta_t - \frac{1}{2}\langle\beta\rangle_t = 1$$

$$E_x\, e^{\beta_t - \frac{1}{2}\langle\beta\rangle_t}\left(\gamma_t - \langle\gamma,\beta\rangle_t\right) = 0$$

この Lemma は「確率積分の変換公式」によって示される。

T_n の作り方だけ示しておく。

$$\sigma_n = \sup\{t : B[0,t] \le n\} \quad \text{とおくと}$$

$$\beta_t^n = \int_0^t a(x_s)\chi_{t<\sigma_n}\, d\hat{u}_s \quad \text{が存在する。}$$

$t < \sigma(w)$ なる t に対しては $t < \sigma_n(w)$ なる n が存在し、$m \ge n$ なる任意の m に対して、$\beta_t^m = \beta_t^n$ だからこの値を β_t とおく。すると

$$\beta_{t\wedge\sigma_n} = \beta_t^n \quad \text{がわかる。}$$

$$\sigma(m,n) = \sup\left\{t : t \le \sigma_n,\ \sup_{s\le t}|\beta_s| \le m,\ \sup_{s\le t}|\hat{u}|_s \le m,\ A_t^{[u]} \le m\right\}$$

とおくと、

n に対して次のような m が存在する。

$$P_x\left(\sigma(m,n) < \sigma_n - \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n^2}$$

この m をとって、$T_n = \sigma(m,n)$ とおけばよい。

あとは Lemma の γ を、$\hat{u}$ でおきかえれば定理が容易に示される。

4 ここでは H が fine open である事を示す。

即ち regular point からでれば、しばらくは singular point へは達しないで、H の中だけ動く。

[定理2]

x を regular point とするとき、次のような $\mathcal{B}(S)$-可測集合 $V(x)$ が存在する。 $V(x) \ni x$, $V(x) \subset H$

$$P_x(\tau(V(x)) \leq \theta < \zeta) = P_x(\theta < \zeta) \quad \cdots\cdots (4.1)$$

$$P_x(\tau(V(x)) > 0) = 1 \quad \cdots\cdots (4.2)$$

ここで τ は first exit time

[証明の概略]

[I] $V(x)$ の定義と可測性。

$$U_n = \left\{ x : P_x(\theta \leq \tfrac{1}{n}) \geq 1 - \tfrac{1}{n} \right\}$$

とおくと。 $U_{n+1} \subset U_n$

x が regular ならば ある n が存在して $P_x(\theta > \frac{1}{n}) > \frac{1}{n}$

$\therefore x \in U_n^c$ よって $V(x) \subseteq U_n^c$ とおく。

可測性は、まず有界連続関数 φ に対して、

$$g(x) = E_x(\varphi(B_{\frac{1}{n}})) \quad \text{とし、}$$

$\lim_{n \to 0} H_n g(x) = g(x)$ を示し、$g(x)$ は $\mathcal{B}(S)$-可測であることがわかり、次に一般の有界可測関数 φ に対しても同じことがいえる。 $\varphi(a) = \chi_{\{a=\infty\}}$ とおけば、$V(x)$ の可測性がわかる。

(4.1) の証明は略し. (4.2) を証明する.

[II] path が continuous であるから. $\zeta(U_n(x)) = \tau(V(x))$

よって. $P_x(\zeta(U_n)=0)=0$ ..... (4.3)

を示せばよい. まず. compact sets の increasing sequence $\{\Gamma_n\}$ が存在して $\Gamma_n \uparrow U_n(x)$.

$$P_x(\zeta_{\Gamma_m} \downarrow \zeta_{U_n(x)}) = 1$$

(4.3) を否定すると. $P_x(\zeta_{\Gamma_m} \downarrow 0) = 1$

$\zeta_{\Gamma_m} < \zeta$ では $x_{\zeta_{\Gamma_m}} \in U_n(x)$ だから

$$P_{x_{\zeta_{\Gamma_m}}}\left(\zeta \le \frac{1}{n(x)}\right) \ge 1 - \frac{1}{n(x)}$$

故に $E_x\left\{P_{x_{\zeta_{\Gamma_m}}}\left(\zeta \le \frac{1}{n(x)}\right) ; \zeta(\Gamma_m) < \zeta\right\} \ge \left(1-\frac{1}{n(x)}\right) P_x\{\zeta(\Gamma_m) < \zeta\}$

左辺 $= P_x\left\{\zeta(w^+_{\zeta_{\Gamma_m}}) \le \frac{1}{n(x)} ; \zeta(\Gamma_m) < \zeta\right\}$

$$\le P_x\left\{B\left[\zeta(\Gamma_m), \zeta(\Gamma_m) + \frac{1}{n(x)} + \frac{\delta}{2}\right] = \Delta,\ \zeta(\Gamma_m) < \zeta\right\}$$

$$\le P_x\left\{B\left[0, \frac{1}{n(x)} + \delta\right] = \Delta\right\} + P_x\left\{\zeta(\Gamma_m) \ge \frac{\delta}{2}\right\}$$

$$\le P_x\left\{\zeta \le \frac{1}{n(x)} + \delta\right\} + P_x\left\{\zeta(\Gamma_m) \ge \frac{\delta}{2}\right\}$$

ここで m は任意であり. $P_x(\zeta(\Gamma_m) \downarrow 0) = 1$

を仮定しているから $P_x\left(\zeta(\Gamma_m) \ge \frac{\delta}{2}\right) \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty)$

又 $P_x(\zeta(\Gamma_m) < \zeta) \longrightarrow 1$

従って.

$$P_x\left\{\theta \le \frac{1}{n(x)} + \delta\right\} \ge 1 - \frac{1}{n(x)}$$

が任意の δ に対して成り立つ.

$$\therefore \quad P_x\left\{\theta \le \frac{1}{n(x)}\right\} \ge 1 - \frac{1}{n(x)}$$

これは $x \in U_{n(x)}$ を意味し, 矛盾である。 (証明終り)

5. [例1]

regular point, singular point を, $[0,1)$ 上の吸収壁Brown運動を例にして考えてみる.

Green function $g(x,y)$ は次式で与えられる。

$$g(x,y) = \begin{cases} 2(1-x)y & 0 < y \le x < 1 \\ 2(1-y)x & 0 < x \le y < 1 \end{cases}$$

$u(x) = \int_0^1 g(x,y) f(y)\, dy$ とおくと.

確率積分の変換公式により

$$\hat{u}_t = \int_0^* u'(x_s)\, dx_s, \qquad A_*^{[u]} = -\frac{1}{2}\int_0^* u''(x_s)\, ds$$

$$\langle \hat{u} \rangle_t = \int_0^* u'(x_s)^2\, ds$$ がわかり, さらに

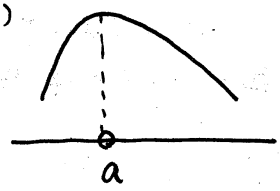
$$B[0,*] = \int_0^* a(x_s)^2\, d\langle \hat{u} \rangle_s = \int_0^* b(x_s)\, ds$$

ここで $$b(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)^2}{u'(x)^2} & \text{if } u'(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } u'(x) = 0 \end{cases}$$

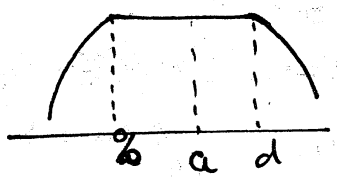
従って f が bounded の時は $u'(a) \neq 0$ なる a は regular point であることがわかる。

又 $u'(a)=0$ なる a は次の二つの場合がある。

(イ)



(ロ)



(イ)の a は singular point である。なぜなら、もし regular とすれば $\exists T_n \uparrow \infty$ $E_a e^{\beta_{x\wedge T_n} - \frac{1}{2}\langle\beta\rangle_{x\wedge T_n}} (u(x_{x\wedge T_n}) - u(a)) = 0$

$\therefore\ u(a) = u(x_{x\wedge T_n})$ a.e. P_a. で矛盾.

(ロ)では. a は regular. point で. b. d は singular point であることがわかる。

6

今まで一つの u を固定して話をしたが. ここで異なった u を考え. ある点が regular になったり. singular になったりする場合を. (0,1)上の Brown 運動について考える。即ち. 0 1 の hitting time が ∞ になる u と. ならない u を区別する必要十分条件を与える。はじめにいくつかの Lemma を準備する。

[Lemma 1]

$g(x)$ を $(0,1)$ の境界上の関数とする。

σ' をそこへの hitting time とする。

$v(x) = E_x\left(e^{-\int_0^{\sigma'} V(x_s)ds} g(x_{\sigma'})\right)$ とおくと.

$v(x)$ は $\frac{1}{2}f''(x) - V(x)f(x) = 0$

の有界な解である。

[Lemma2]

$$\frac{1}{2}f''(x) - V(x)f(x) = 0 \qquad f(x) \geq 0 \quad x \in [0,1]$$

が $f(1)=0$ なる有界でない解をもつ事と，次の事は同値である。 $0 < {}^{\exists}a < 1$.

$$\int_0^a x\,V(x)\,dx = \infty$$

[Lemma3]

$$P_x\left(\int_0^{\sigma_0} V(x_s)ds = \infty ,\ \sigma' = \sigma_0 \right) = P_x(\sigma' = \sigma_0)$$

である事と次の事が同値である。 $0 < {}^{\exists}a < 1$

$$\int_0^a x\,V(x)dx = \infty$$

[Proposition]

$(0,1)$ における Brown 運動において，0 への hitting time が σ になるための必要十分条件は。

$$0 < {}^{\exists}a < 1 \qquad \int_0^a x \cdot \frac{u''(x)^2}{u'(x)^2}\,dx = \infty.$$

次に regular point であるが，他の点からその点に hit すると σ になる例を考える。

$[-1,0]$ で反射壁 Brown 運動

$(0,1)$ で吸収壁 Brown 運動　　を考え。

$$u(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{x} & 1 > x > 0 \\ 1 & 0 \geq x \geq -1 \end{cases}$$ とおく。

これは，0 は明らかに regular point であるが，上の[Proposition]より，0に hit すると σ になってしまう。

7 次に上の例で示されたような集を characterize する。

[定理3]
Hunt の条件(F)の下で，次のような thin Borel set
$L \subset H$ が存在する。
任意の regular point に対して．

$$P_x(\sigma = \sigma_{H^c} \wedge \sigma_L : \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$$

が成立する。

この証明には Blumenthal-Getoor [fifth Berkeley]
による次の Lemma を用いる。

[Lemma]
Hunt の条件(F)の下で，T を thin accessible terminal time とし． $P_x(\zeta \le T < \infty) = 0$ とするとき．
thin Borel set $B \subset E$ が存在して．

$$T = T_B \quad \text{a.s. on } \{T < \zeta\}$$

成立する。

Lemma，定理とも証明は略する。

具体的に L が どのような集合であるかを示すのが次の
Proposition で， L は $U_n = \{x : P_x(\sigma \le \frac{1}{n}) \ge 1 - \frac{1}{n}\}$
の $n \to \infty$ の極限として考えられることを示す。

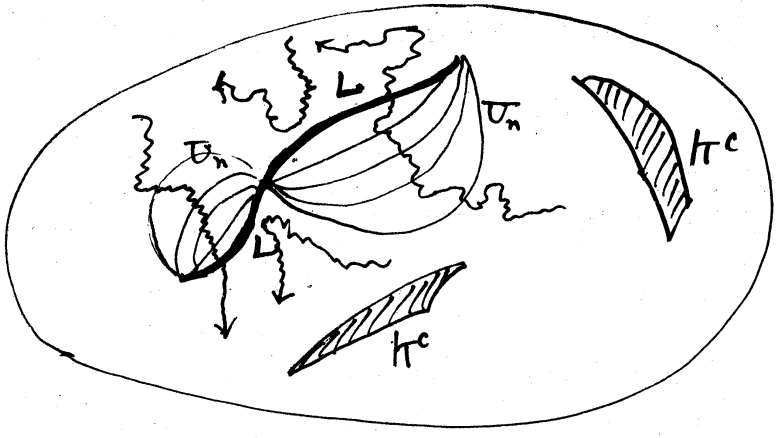
[Proposition]
任意の x に対して $P_x(\lim_{n\to\infty} \sigma_{U_n} = \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$
が成り立つ。特に x を regular point とすれば

$$P_x(\lim_{n\to\infty} \sigma_{U_n} = \sigma_L, \ \sigma = \sigma_L < \zeta) = P_x(\sigma = \sigma_L < \zeta)$$

また L はあるいみで translation line に似た性質を持っていることを示すのが次の Proposition である。

[Proposition]

x を regular point とすると、ある n が存在して

$$P_x(\theta_{U_n} > 0) = 1.$$

以上のことを、模型的に図で示せば次のようになる。