

Bethe-Salpeter 方程式の 固有値が実数であることの証明

京大 数研 中西 襄

この仕事は内藤清一氏との共著論文 "Reality of the Eigenvalues of the Bethe-Salpeter Equation" (RIMS' 52, Progress of Theoretical Physics に投稿) に詳しいので、ここではごく概略のみを報告する。

例之は、質量がそれぞれ m_1, m_2 の 2 つのスカラ一粒子が、質量 μ のスカラ一粒子を交換する ladder model の Bethe-Salpeter (B-S) 方程式を考へる。Wick rotation¹⁾ を行なへば、B-S 方程式は

$$K(p, p_4) \phi(p, p_4) = \lambda \int d^3 p' \int dp'_4 I(p, p_4; p', p'_4) \phi(p', p'_4) \quad (1)$$

となる。ここに $\lambda = g^2 / (4\pi)^2$ は固有値、 ϕ は B-S 振巾、

$$K(p, p_4) \equiv [m_1^2 + p^2 - (\eta_1 \sqrt{s} + ip_4)^2] [m_2^2 + p^2 - (\eta_2 \sqrt{s} - ip_4)^2],$$

$$I(p, p_4; p', p'_4) \equiv \pi^{-2} [\mu^2 + (p - p')^2 + (p_4 - p'_4)^2]^{-1} \quad (2)$$

で, $\eta_{\bar{0}} = m_{\bar{0}} / (m_1 + m_2)$, \sqrt{s} は束縛状態のエネルギーである。
 $m_1 = m_2$ のときは $K > 0$ となるから直ちに Hilbert-Schmidt
 型の積分方程式に変換ができ, 固有値 λ は実数かつ正であるこ
 とは明らかである。ところが, $m_1 \neq m_2$ のときは K はもはや実
 数でないから, λ がこのときも実数であるかどうかは問題であ
 る。最近 Cutkosky-Deo²⁾ が数値計算で, (1) を Regge 化した
 ときに得られる Regge trajectory が複素数になりうること
 を示したので, この問題はとくに興味がある。

λ が実数であることを証明するには, (2) から直ちに導かれ
 る次の3つの性質を用いる (* は複素共役):

$$K^*(p, p_4) = K(p, -p_4),$$

$$I^*(p, p_4; p', p'_4) = I(p, -p_4; p', -p'_4),$$

$$I(p', p'_4; p, p_4) = I(p, p_4; p', p'_4). \quad (3)$$

証明の方法は次の通りである。(1) に $\phi^*(p, -p_4)$ をかけて, p, p_4 につき積分する(積分は収束する)。この等式の複素共役をと
 り(3)の性質を考慮すると, 両辺の積分は実は複素共役をとる
 前の式のそれらと全く同じであることが分る。従ってそれら
 の積分が0でなければ, $\lambda = \lambda^*$, すなわち λ が実数であること
 が分る。積分が0になる場合も今考えている model では実は
 心配しなくてもよいことがいえ, λ が実数であるという証明が

完結する。

この結果と、最近荒船³⁾氏が証明した $\text{Re } \lambda > 0$ とを組合せると $\lambda > 0$ が得られる。また λ が実数であることから、 s の関数として $s < (m_1 + m_2)^2$ で branch point をもたないことが分る。

上記の固有値が実数であることの証明は、実は ladder model の時間反転不変性に基くものであるので、積分が ∞ または 0 になる場合の吟味の点を除けば、他の model の場合にも容易に拡張できる。K, I が matrix のときは、(3) の性質は複素共役の代りに適当な共役操作をとればやはり成立する。

[なお、講演の際、Regge化したとき Cutkosky-Deo²⁾ の現象が起るのは同じ B-S 量子数をもつ trajectory の間でだけであると言ったが、これは固有値 $\lambda_\ell(s)$ が ℓ について正則であることがいえていないので、正しくない結論だったので取消する。]

文献

- 1) G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954), 1124
- 2) R. E. Cutkosky and B. B. Deo, Phys. Rev. Letters 19 (1967), 1256.
- 3) J. Arafune, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), to be published.