

ある種の  $C^*$ -代数の生成について

東北大 教養 岡安隆照

§ 1. 緒言.

von Neumann 代数の生成に関する議論はまだ大分不満を残してはいるが、非常に興味深い幾つかの結果を言及していること勿論である。それらの研究が  $C^*$ -代数の生成についての多くの問題を自然に提起するわけで、事実この課題に関する報告が最近散見されたのである。その目ざすところは、von Neumann 代数の生成の議論と同様に、代数的な興味と共に、non-normal operators の構造の解析である。しかしながら、von Neumann 代数の生成の議論の、又  $C^*$ -代数の理論の現状の下、多くを期待することは難かしいことかも知れない。

以下本講演では特に GCR-代数を生成するような operator 即ち GCR-operator を中心に、 $C^*$ -代数の生成に関する最近の結果を述べたいと思う。

$H$  は Hilbert 空間、 $F$  は  $H$  の上の有界な linear operators

(以下単に operators) の族とするとき,  $\mathcal{F}$  を含む  $\mathcal{H}$  上の最小の von Neumann 代数を  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  と書き, それは  $\mathcal{F}$  によって "von Neumann 代数として" (混雑が無ければ) 生成されるという. 又 operator  $T$  は,  $\mathcal{R}(T)$  が I 型, II 型, III 型のとき, それぞれ I 型, II 型, III 型であるといわれることは既に多くの研究者によって行われている. 可分な Hilbert 空間上の可換な von Neumann 代数が一つの self-adjoint operator で生成されるということはよく知られている ([12]). 又 C. Pearcy は, 可分な Hilbert 空間上の I 型の von Neumann 代数は一群の operator で生成されることを示した ([15]). 各々の型の operator が存在すること, のみならず各々の型の partial isometry が存在することもわかっている ([16]). なお von Neumann 代数の生成に関する文献は [18] に詳しくある.

さて Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の operators の族  $\mathcal{F}$  に対し,  $\mathcal{A}(\mathcal{F})$  を  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{H}$  上の identity operator  $I$  を含む  $\mathcal{H}$  上の最小の  $\mathcal{C}^*$  代数を表わすことにしよう. そして  $\mathcal{A}(\mathcal{F})$  は  $\mathcal{F}$  によって " $\mathcal{C}^*$  代数として" (混雑が無ければ) 生成されるというわけである. 上記の von Neumann の生成定理に相当する,  $\mathcal{C}^*$  代数についての定理は全く知られていないが, 多少ともそれに近いものとして次の事実がわかっている.

定理. 一つの Hilbert 空間上の可換な  $C^*$ -代数が, それに  
含まれる可算個の idempotents により,  $C^*$ -代数として生  
成されるならば, それは一組の self-adjoint operator  
により生成される ([17], pp. 293-294).

§ 2. GCR-operators, 特に isometries.

定義. Hilbert 空間上の operator  $T$  (または  $A(T)$ ) が CCR-  
代数, GCR-代数, NGCR-代数であるとき, それらに対応  
して CCR-operator, GCR-operator, NGCR-operator である  
といわれる.

CCR-代数, GCR-代数, NGCR-代数は最近ではそれぞれ  
 4 liminal algebra, postliminal algebra, antiliminal  
algebra とも呼ばれるのであるが, 詳しくは J. Dixmier の  
 text [6] と [9], [11], [14] と共に参照されたい.

勿論 CCR-operator は GCR-operator であり, GCR-代  
 数はその任意の表現による後が I 型の von Neumann 代数を  
 生成するような  $C^*$ -代数として特徴づけられるのであるから,  
 GCR-operator は I 型である. 又 II 型又は III 型の operator  
 は NGCR-operator であることも容易にわかる.

任意の normal operator, 任意の compact operator は  
 CCR-operator であり, 任意の isometry (または I 型) であ  
 ること ([20]) から直接 GCR-operator であることがわかる.

これらの GCR-operators は II 型 I 型であるが、I 型である  
 ても GCR-であるとは限らないのであって、そのような  
 operator を探す事も難しくはない (84).

isometry が生成する  $C^*$  代数の構造は次の意味で完全に  
 わかる.

[4]

定理 (L.A. Coburn). Hilbert 空間  $H$  上の isometry  $V$  が  
? + elementary 2)  
生成する  $C^*$  代数  $A(V)$  は最小の closed ideal  $\mathcal{K}$  をもち、 $A(V)/\mathcal{K}$   
は単位円周  $\Gamma$  上の複素数値連続函数の全体が作る可換な  $C^*$   
代数  $C(\Gamma)$  と同型である。

この証明は自明である。先ず重複度 1 の shift  $S$  が生成す  
 る  $C^*$  代数  $A(S)$  は "正則的にコンパクト" (換言すれば compact  
 operators の全体  $\mathcal{K}$  を言ってしまう)、従って又それは  $A(S)$   
 の最小の closed ideal であり、 $A(S)/\mathcal{K}$  が  $C(\Gamma)$  と同型になること  
 である。実際  $I - S S^*$  は 1 次元の部分空間への射影である  
 ことから compact になり、これが  $A(S)$  に入るから  $\mathcal{K} \subset$   
 $A(S)$  が得られる ([7], p. 85)。そして  $\mathcal{K}$  が最小の closed  
 ideal であることもわかる。又  $A(S)$  から  $A(S)/\mathcal{K}$  への自然な準  
 同型写像による  $S$  の像  $S'$  は unitary でありその spectrum は  $\Gamma$  -  
 極になっていることがわかるので、 $A(S)/\mathcal{K}$  は  $C(\Gamma)$  と同型に  
 なる。次に重複度  $d$  の shift  $S$  について考える。それは重複  
 度 1 の shift  $S_0$  の amplification であるから、 $A(S)$  は  $A(S_0)$  と

同型になる。所で一般に任意の isometry  $V$  (unitary  $U$  と shift  $S$  の直和  $U \oplus S$  である ([10]) から、任意の  $T \in \mathcal{A}(V)$  は  $T = T_1 \oplus T_2$ ,  $T_1 \in \mathcal{A}(U)$ ,  $T_2 \in \mathcal{A}(S)$  と書かれるのであるが、これに  $T_2$  を対応させる写像を考えるとき  $\mathcal{A}(V)$  は  $\mathcal{A}(S)$  と同型になるのである。

なお L.A. Coburn は [5] で  $\mathcal{H}^2$  上の Toeplitz operator  $T_2$  が生成する  $C^*$ -代数の構造を上定理よりも多少具体的に調べている。

normal operator と isometry とを合わせた nearly normal operator であるが、実は任意の nearly normal operator が  $GCR$ -operator であることがわかる ([2], [24])。nearly normal operator は  $\pm u$  に可換な self-adjoint operator と isometry との積として書くことのできる operator である ([3])。このことを想起すれば、下に述べる定理が意味をもつことになる ([14])。

定理. Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の  $GCR$ -operators  $S, T$  が互いに可換で、 $S^*$  と  $T$  も互いに可換ならば、これらの積  $ST$  は  $GCR$ -operator である。

実際、 $\mathcal{A}(S)$  と  $\mathcal{A}(T)$  の代数的な tensor 積  $\mathcal{A}(S) \otimes \mathcal{A}(T)$  ([21]) の上の  $\alpha$ -norm と  $\nu$ -norm は一致して  $\mathcal{A}$  から、 $\mathcal{A}(S) \otimes \mathcal{A}(T)$  から  $\mathcal{A}(S, T)$  の中への自然な準同型写像は  $\alpha$ -norm に関して連続になり ([13])、それら  $\alpha$ -積  $\mathcal{A}(S) \widehat{\otimes}_{\alpha} \mathcal{A}(T)$  上

に連続的に拡張あることが出来る。そのとき  $A(S) \hat{\otimes}_2 A(T)$  の像はちょうど  $A(S, T)$  になる。しかるに  $A(S) \hat{\otimes}_2 A(T)$  は  $G$   $\mathbb{C}R$ -代数である ([22]) から  $A(S, T)$  も  $G$   $\mathbb{C}R$ -代数、従って  $A(S, T)$  も  $G$   $\mathbb{C}R$ -代数である。

$T^*T - TT^*$  が compact operator になるような operator  $T$  は almost normal operator と呼ばれる著者があつたように思ふが、この種の operator を  $G$   $\mathbb{C}R$ -operators とある (cf. [1], [2]).

定理. 非可換な 2 変数の多項式  $p$  は、 $p(S, S^*) = 0$  を満足する Hilbert 空間  $H$  上の operator  $S$  が  $G$   $\mathbb{C}R$ -operator になるようにするものがあるとし、 $C \in H$  上の compact operator とすれば  $p(T, T^*) = C$  を満足する  $H$  上の operator  $T$  は  $G$   $\mathbb{C}R$ -operator である。

証明は直ぐ。

§3. I 型の von Neumann 代数の  $G$   $\mathbb{C}R$ -operator による生成。

既に述べた様に、可分な Hilbert 空間  $H$  上の I 型の von Neumann 代数は一組の operator による von Neumann 代数として生成されるものがあるが、一組の  $G$   $\mathbb{C}R$ -operator による von Neumann 代数として生成されるものがあるか。本章ではこの問題を肯定的に解いてみた ([14]).

定理. 可分な Hilbert 空間  $H$  上の I 型の von Neumann

代数は一列の GCR-operator  $T_i$ , von Neumann 代数  $\mathcal{A}$  を生成される。

これを示すために先ず次の基本定理を示そう。

定理.  $\{A_i\} \in C^*$ -代数の列で, 各  $A_i$  は Hilbert 空間  $H_i$  上に作用し,  $I_{H_i}$  上の identity operator を  $I_i$  とする。もしも各  $A_i$  が  $\rightarrow$  の operator によって生成されるならば,  $\{A_i\}$  の  $C^*(\omega)$ -和  $\sum \oplus^{C^*(\omega)} A_i = I$  上の identity operator を加えて得られる  $H$  上の  $C^*$ -代数は  $\rightarrow$  の operator  $T_i = I_i \oplus I$  によって生成される。  $T = \sum \oplus I_{H_i}$ 。

証明の本質的には [7] の一補題の証明と同じものである。添数  $i$  は全正整数に亘るものとして示す。各  $i$  に対して  $T_i \in A_i$  が  $A_i$  を生成しているとしよう。次の条件を満足する  $\rightarrow$  の複素数列  $\{\lambda_i\}$ ,  $\{\mu_i\}$  と複素平面上の閉円板の列  $\{K_i\}$  を選ぶのは容易である:

- (a)  $\lambda_i \neq 0$ ;
- (b)  $K_i$  の中心を  $\gamma_i$ , 半径を  $\delta_i$  とするとき  
 $0 < \gamma_i \downarrow 0, \delta_i \downarrow 0$ ;
- (c)  $K_i \cap K_j = \emptyset, i \neq j$ ;
- (d)  $S_i = \lambda_i T_i + \mu_i I$  とするとき  $\sigma(S_i) \subset K_i$ ;

そして

- (e)  $\{S_i\}$  は一様位相に依りて 0 に収束する。

こゝに identity operator は常に  $I$  と書くことにする. 任意に正整数  $i_0$  を固定し,  $L = \sum_{i > i_0} \oplus Id_i$ ,  $Q = \sum_{i > i_0} \oplus S_i$  とおく. 次に  $K$  を原点  $0$  を中心とし,  $\bigcup_{i > i_0} K_i$  を含む領域,  $M$  を領域  $\bigcup_{1 \leq i \leq i_0} K_i \cup K$  とする.  $M$  上の函数  $f \in$

$$f(z) = 0 \text{ if } z \notin K_{i_0}; = 1 \text{ if } z \in K_{i_0}$$

により  $f$  を定義する. この  $f$  は Mergelyan の定理の仮定を満足するから, 我々は  $M$  上で  $f$  に収束する多項式の列  $\{p_k\}$  を見つけることができる.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_i} (p_k(z) - f(z)) (zI - S_i)^{-1} dz = p_k(S_i), \quad i < i_0;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} (p_k(z) - f(z)) (zI - Q)^{-1} dz = p_k(Q) = \sum_{i > i_0} \oplus p_k(S_i);$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{i_0}} (p_k(z) - f(z)) (zI - S_{i_0})^{-1} dz = p_k(S_{i_0}) - I$$

から,

$$\|p_k(S_i)\| \leq \alpha \sup_{z \in M} |p_k(z) - f(z)|, \quad i \neq i_0;$$

$$\|p_k(S_{i_0}) - I\| \leq \alpha \sup_{z \in M} |p_k(z) - f(z)|$$

を満足する定数  $\alpha$  があることがわかり,  $S = \sum \oplus S_i$  とおくと  
同一位相の下に

$$p_k(S) = \sum \oplus p_k(S_i) \rightarrow E_{i_0} = \dots \oplus 0 \oplus \overset{i_0}{I} \oplus 0 \oplus \dots$$

である. 故に  $E_{i_0} \in A(S)$ . 故に又  $\dots \oplus 0 \oplus S_{i_0} \oplus 0 \oplus \dots \in$

$\mathbb{A}(S)$ . 従って我々の定理が得られる。

この主定理に戻る。先可分な Hilbert 空間の上の homogeneous  $T_2$  von Neumann 代数は一つの GCR-operator を生成したことを示す。実際その  $T_2$  von Neumann 代数は  $\mathbb{Z} \otimes B(L)$  の形をとり、ここで  $\mathbb{Z}$  は可分な Hilbert 空間上の可換  $T_2$  von Neumann 代数、 $B(L)$  は可分な Hilbert 空間  $L$  上の  $T_2$  の operators を作る von Neumann 代数である。von Neumann の生成定理によつて見出し得る、正の可逆  $T_2$  operator  $T \in \mathbb{Z}$  を生成する  $\mathbb{Z}$  の  $\sum_{i=1}^{\infty} P_i$   $\wedge \dim L = 1$ ,  $1 < \dim L < \infty$ ,  $\dim L = \infty$  に従つて  $B(L)$  の operator  $S$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ I & & \\ & \ddots & \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ I & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} \in S$  とおくと、 $\mathbb{A}(S) = B(L)$   $\mathbb{Z}$ ; GCR-operator  $T = P \otimes S$  に対して  $\mathbb{A}(T) = \mathbb{Z} \otimes B(L)$  であることがわかる。

そこで定理 5.2.1 に示した von Neumann 代数  $\mathbb{A}$  は homogeneous  $T_2$  von Neumann 代数の直和  $\sum \mathbb{R}_i$  と書けば、各  $\mathbb{R}_i$  は一つの GCR-operator  $T_i$  によつて生成され、 $\{ \mathbb{A}(T_i) \}$  の  $C^*(\infty)$ -和  $\mathbb{A}$  を考えるときこれは  $\mathbb{A}$  偏 ~~弱~~ weak topology に依り  $\mathbb{R}$  稠密な GCR-代数である。だから上述の定理によれば、 $\mathbb{A}$  は  $\mathbb{R}$  の operator を生成したか、それが成り立つものになる。

#### §4. NGCR-operators.

Ⅱ型又はⅢ型の operator は NGCR-operator なのであるから, NGCR-operators の例には事欠かないのであるが, 構造の知らぬところの NGCR-代数である UHF-代数 ([8]) を生成する operator が存在することがわかってゐる。

定理 (D. Topping [23]). 一つの Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の UHF-代数  $A$  は 一組の operator を生成する, 従つて  $\mathcal{H}$  が可分ならば,  $\mathcal{H}$  上に作用する "既約な", 従つてⅡ型 of NGCR-operator が存在する。

UHF-代数はいくつかの因子分解が出来る  $C^*$ -代数なのであつて, 有限型Ⅱ型の因子の列  $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$  が次の条件を満足して存在する:

- (a)  $I \in M_n \subset A$ ;
- (b)  $n \neq m$  ならば  $M_n$  と  $M_m$  は operator-wise に可換;

そして

- (c)  $\bigcup_{n \geq 1} M_n$  は  $A$  を生成する。

いづれ  $M_n$  を生成する operator を  $T_n$  とする。

$\text{Re } T_n, \text{Im } T_n$  はそれぞれ有限個の可換な  $M_n$  の projections  $\{E_j^{(n)}\}, \{F_j^{(n)}\}$  の実係数の線型結合として書くことが出来る。

そこで  $E = \bigcup_{n \geq 1} \{E_j^{(n)}\}, A_1 = A(E); F = \bigcup_{n \geq 1} \{F_j^{(n)}\}, A_2 = A(F)$  とおくと §1 で述べた定理から self-adjoint opera-

$\text{tors } H_1, H_2$  として  $A_1 = A(H_1), A_2 = A(H_2)$  としたものがあ  
 る。よって  $\mathbb{I} = H_1 + iH_2$  とおくと、これが  $A$  を生成すること  
 になる。又  $A$  の任意の既約表現  $\pi$  は  $A$  が単純な可換環である、  
 忠実に可換になり、 $\pi(\mathbb{I})$  は  $\pi$  の表現空間の既約な NGCR-  
 operator になる。それら  $\mathbb{I}$  上に移せば、その operator であ  
 る。

上の定理の直接の系として Powers の III 型因子は一回の opera-  
 tor によって生成されることになった。というのもそれはた  
 んだ UHF-代数の weak closure として得られるから  
 である。

## 文 献

1. H. Behncke, Structure of certain non-normal operators, Journ. Math. Mech. 18(1968), 103-107.
2. \_\_\_\_\_, A class of non-normal operators, Preprint.
3. A. Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 4(1953), 723-728.
4. L. A. Coburn, The  $C^*$ -algebra generated by an isometry, Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 722-726.
5. \_\_\_\_\_, The  $C^*$ -algebra generated by an isometry, II, Preprint.
6. J. Dixmier, Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris(1964).
7. R. G. Douglas and C. Pearcy, von Neumann algebras with a single generator, Preprint.
8. J. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 95(1960), 318-340.
9. \_\_\_\_\_, Type I  $C^*$ -algebras, Ann. Math. 73(1961), 527-611.
10. P. R. Halmos, Shifts on Hilbert space, Journ. Reine Angew. Math. 208(1961), 102-112.
11. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70(1951), 219-255.
12. J. von Neumann, Zur Algebra der Funktional-Operationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102(1930), 307-427.
13. T. Okayasu, On the tensor products of  $C^*$ -algebras, Tôhoku Math. Journ. 18(1966), 325-331.
14. \_\_\_\_\_, On GCR-operators, To appear in Tôhoku Math.

Journ.

15. C. Pearcy,  $W^*$ -algebras with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 831-832.
16. \_\_\_\_\_, On certain von Neumann algebras which are generated by ~~partial~~ partial isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 393-395.
17. C. E. Richart, General theory of Banach algebras, D. van Nostrand, New York(1960).
18. ~~斎藤~~ 斎藤, von Neumann 代数の生成について, 数理解析研究所 <sup>講究録</sup> 49, 1-14.
19. S. Sakai, On a characterization of type I  $C^*$ -algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 508-512.
20. N. Suzuki, Isometries on Hilbert spaces, Proc. Jap. Acad. 39(1963), 435-438.
21. M. Takesaki, On the cross-norm of the tensor product of  $C^*$ -algebras, Tôhoku Math. Journ. 16(1963), 111-122.
22. J. Tomiyama, Applications of Fubini type theorem to the tensor product of  $C^*$ -algebras, Tôhoku Math. Journ. 19(1967), 213-226.
23. D. Topping, UHF algebras are singly generated, Math. Scand. 22(1968), 224-225.
24. T. Yoshino, Nearly normal operators, Tôhoku Math. Journ. 20(1961), 1-4.